

VIBRATIONS LIBRES DES POUTRES COMPOSITES MULTICOUCHES A PLIS CROISES

Reçu le 18/10/2006 – Accepté le 17/10/2008

Résumé

Dans un précédent article concernant l'étude des vibrations transversales des poutres composites multicouches symétriques à phases isotrope ou orthotropes (unidirectionnels 0^0), nous avons procédé à la détermination de leurs fréquences propres en utilisant une approche d'homogénéisation basée sur la notion de caractéristiques mécaniques équivalentes en flexion.

Dans le présent article, cette approche sera appliquée aux autres formes de stratifications, le but étant de déterminer les fréquences et modes propres.

L'étude portera donc sur la considération des vibrations libres non amorties d'une poutre composite multicouches symétrique à plis croisés.

Mots clés : dynamique – poutres composites – stratifiés.

Abstract

In a preceding article concerned with the study of transverse vibrations of symmetrically laminated composite beams with isotropic or orthotropic phases (unidirectional 0^0), we presented a mathematical model based on equivalent mechanical properties in bending.

To generalise this mathematical approach to others form of lamination, the present paper is concerned with the study of undamped free vibration of symmetrically cross ply laminated beams.

The final goal of this work is to obtain general relationship for dynamic behaviour of laminated composite beams that are identical to those made of homogeneous isotropic beams in order to obtain a simple solution for the determination of natural frequencies of the laminated composite beams.

Keys words : dynamic – beams composites- laminated.

K. AOUISSATE

Département de Génie Civil,
Faculté des Sciences de
l'Ingénieur,
Université Mentouri
Constantine, Algérie.

ملخص

(0^0)

الكلمات المفتاحية :

Grâce à leur légèreté et leur résistance, les matériaux composites se sont développés rapidement dans le monde. Ils ont ouvert des marchés importants dans l'aéronautique, l'automobile, la construction ou encore le bâtiment. Leur emploi dans le domaine industriel nécessite une maîtrise de leur comportement mécanique, plus particulièrement dans le domaine des vibrations. A défaut d'étude expérimentale, l'analyse dynamique des poutres composites permet une meilleure maîtrise de leur comportement mécanique et facilite leur exploitation du point de vue de leur conception ainsi que de leur utilisation. Plusieurs auteurs ont mené des études sur les vibrations des poutres composites multicouches et ont proposé des approches de modélisation du mouvement vibratoire. Parmi eux nous pouvons citer Chandrashekara et al qui ont utilisé la méthode des éléments finis [1], Singh et al [2], Abramovitch et al [3], Yildirim et al qui ont utilisé la méthode des matrices de transfert [4]. L'objet de cette étude est de contribuer, par une approche analytique, à la détermination des fréquences propres et modes propres des poutres composites multicouches à plis croisés soumises à des vibrations libres non amorties.

Dans un précédent article [5] concernant l'étude des vibrations transversales des poutres composites multicouches symétriques à plis isotropes ou orthotropes (unidirectionnels 0^0), nous avons présenté une approche d'homogénéisation basée sur les caractéristiques mécaniques équivalentes en flexion pour déterminer leurs fréquences et modes propres. Afin d'élargir l'applicabilité de cette approche d'homogénéisation aux autres formes de stratification, cet article porte sur l'étude des vibrations libres non amorties d'une poutre composite multicouche symétrique à plis croisés.

Ces renseignements sont utiles pour étudier des régimes dynamiques plus complexes. Dans ce qui suit, nous rappelons dans un premier temps les équations de mouvement d'une poutre multicouche symétrique formée de plusieurs plis de différentes épaisseurs à phases élastiques linéaires isotropes tel que déterminées en [6], puis nous appliquerons ces résultats analytiques aux poutres composites multicouches à plis croisés. Enfin, une étude comparative permettra de situer la validité du modèle proposé.

1. MODELE ANALYTIQUE PROPOSE

1.1. Hypothèses

Les équations du mouvement que nous développerons ci-après sont basées sur le principe des rigidités équivalentes et sur la généralisation du principe de l'équilibre dynamique d'un élément de poutre en faisant les hypothèses suivantes :

- pas de glissement ni séparation entre deux couches voisines.
- la discontinuité à l'interface entre les deux couches est négligeable.
- on considère le cas de petits mouvements harmoniques autour d'une position d'équilibre

En général, les hypothèses de la théorie élémentaire des poutres et barres homogènes isotropes s'appliquent. La différence réside dans le caractère anisotrope des matériaux.

Il est clair aussi que les équations d'équilibre exprimées à travers l'étude d'une tranche de barre sont strictement les mêmes que celles des poutres homogènes isotropes puisque leurs démonstration ne fait pas intervenir les propriétés des matériaux.

1.2. Présentation

Soit donc une poutre multicouche constituée par un empilement symétrique de n matériaux isotropes ou orthotropes d'épaisseurs différentes, figure 1.

Soit A la surface totale et h la hauteur totale de la section droite et soit A_i et h_i la surface et la hauteur du pli i respectivement. On a les relations suivantes :

$$A = \sum A_i \text{ et } h = \sum h_i.$$

Soit aussi ρ_i , E_i et G_i la masse et les modules d'élasticité et de rigidité du pli i .

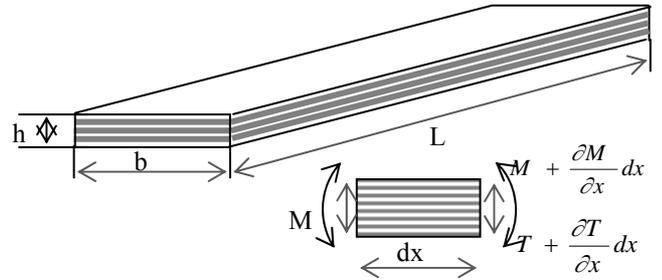


Figure 1 : Poutre multicouche

1.3. Développement théorique

L'empilement des couches de la poutre stratifié étant symétrique le centre de gravité géométrique de sa section droite est en même temps centre des masses et centre des élasticités. Les coordonnées du centre de gravité pondéré et les moments quadratiques de la section droite homogénéisée sont alors données par :

$$y_g = \frac{\sum_{i=0}^n \iint_a E_i y dA}{\sum_{i=0}^n E_i A_i}, \quad z_g = \frac{\sum_{i=0}^n \iint_a E_i z dA}{\sum_{i=0}^n E_i A_i}$$

$$I_y = \frac{\sum_{i=0}^n \iint_a E_i z^2 dA}{\sum_{i=0}^n E_i A_i}, \quad I_z = \frac{\sum_{i=0}^n \iint_a E_i y^2 dA}{\sum_{i=0}^n E_i A_i}$$

D'autre part, le principe de l'équilibre dynamique utilisé précédemment [6] s'applique. En écrivant donc l'équilibre des forces et des moments, on obtient respectivement les deux relations suivantes :

$$T + \frac{\partial T}{\partial x} dx - T - 2 \sum_{i=1}^N f_i dx - f_0 dx = 0$$

(L'indice 0 indique le pli central),

$$M + \frac{\partial M}{\partial x} dx - M + T dx = 0$$

f_i représente les forces d'inertie de la couche i réparties transversalement.

D'autre part, on a d'après l'étude statique :

$$M = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \sum_{i=0}^n \iint_A E_i y^2 dA$$

ou $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ représente la courbure.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

ou v représente le déplacement vertical.

$$E^* I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho^* A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho^* A r^2 \left(1 + \frac{E^*}{K^* G^*} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} + \left(\frac{\rho^{*2} A r^2}{K^* G^*} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} = 0$$

Ces relations permettent, en développant l'intégrale et en remplaçant le moment de flexion M et l'effort tranchant T par leurs valeurs respectives, d'écrire l'équation du mouvement de flexion dynamique transverse $v(x, t)$ de la poutre composite en théorie d'Euler- Bernoulli :

$$E^* I \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho^* A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Dans le cas où les effets du cisaillement transversal et de l'inertie de rotation sont pris en compte, on obtient l'équation suivante :

A partir de là ; on peut définir une section équivalente à la section multicouche réelle avec des caractéristiques dites homogénéisées E^* , G^* , ρ^* . On retrouve le module

$$E^* = \left[E_0 + 2 \left[\sum_{i=1}^n E_i \left(\frac{A_i}{A_0} \right)^3 + 3 \frac{A_i}{A_0} \left(\frac{A_i}{A_0} + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_{(i-1)}}{A_0} - 1 \right)^2 \right] \right]$$

d'élasticité mathématiquement équivalent E^* en divisant la rigidité par le moment d'inertie I de toute la section droite, on obtient ainsi tous calculs faits :

De même la masse volumique mathématiquement équivalente sera donnée par :

$$\rho^* = \left[\rho_0 + 2 \left(\sum_{i=1}^n \rho_i \frac{A_i}{A_0} \right) \right] \left[1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A_0} \right]^2$$

Ainsi que le module de glissement mathématiquement équivalent :

$$G^* = \left(G_0 + 2 \sum_{k=1}^n G_k \frac{A_k}{A_0} \right) A$$

Pour les détails de calculs voir la référence [6].

Un programme de calcul nécessaire à l'exploitation numérique des résultats théoriques obtenus, est élaboré.

A cet effet, pour chaque pli i , on

introduit les caractéristiques mécaniques homogénéisées (E^* , ρ^* , G^*) ainsi que les caractéristiques géométriques (h_i , A_i).

Ces données sont traitées dans le programme en question qui étudie les vibrations des poutres homogènes [7].

2. ETUDE COMPARATIVE

Dans un but de validation, les résultats sont comparés à ceux publiés dans la littérature. Pour cela, on traite l'exemple d'une poutre orthotrope en graphite/époxyde de longueur L , de hauteur h et dont les caractéristiques mécaniques sont : $E_1 = 144.8$ GPA, $E_2 = 9.65$ GPA, $G_{23} = 3.45$ GPA ; $G_{12} = G_{13} = 4.14$ GPA, $\nu_{12} = 0.3$, $\rho = 1389.23$ kg/m³.

Les fréquences propres de cette poutre déterminées par le modèle proposé sont comparées à celles publiées par d'autres auteurs tel que Chandrashekara et al (tableau 1), Abramovitch et al, Singh et al (tableau 2) et Yildirim et al (tableau 3).

Le tableau 1 présente une comparaison des résultats obtenus avec ceux rapportés par Chandrashekara et al. Ces résultats concernent les 5 premiers modes de la poutre considérée pour un rapport $L/h = 15$. L'écart trouvé est de 0.2% pour la poutre simplement appuyée et de 4% pour la console. Pour les deux autres cas d'appuis, il se situe entre 10% et 15% en moyenne.

Le tableau 2 présente les valeurs des fréquences sous forme non dimensionnelle de la même poutre mais avec un rapport $L/h = 10$. En moyenne l'écart entre ces valeurs est de 0.3% pour la poutre simplement appuyée et de 0.9% pour la console, ce qui est négligeable. Pour la poutre doublement encastree, l'écart est assez élevé.

D'une manière générale les valeurs trouvées par cette approche sont d'un même ordre de grandeur que les valeurs trouvées par Chandrashekara et les valeurs trouvées par Abramovitch et al et Singh et al pour la poutre simplement appuyée et la console, pour les deux autres types d'appuis elles se situent légèrement au dessus.

Tableau 1 : Fréquences naturelles (kHz) pour différents cas d'appuis. $L/h = 15$. [0°/90°/90°/0°].

Poutre	mode	1	2	3	4	5
Simplement appuyée	Réf [1]	2,5023	8,4812	15,7558	23,3089	30,8386
	présente	2,4953	8,4531	15,6932	23,2398	30,871
Encastree Encastree	Réf [1]	4,594	10,2906	16,9659	24,041	31,2874
	présente	5,6568	13,2072	21,3647	29,4137	37,326
Encastree Libre	Réf [1]	0,9241	4,8925	11,44	18,6972	26,2118
	présente	0,8892	4,717	10,8904	17,7483	24,8687
Encastree Appuyée	Réf [1]	3,5254	9,4423	16,3839	23,685	31,0659
	présente	3,8988	10,6963	18,3976	26,1472	33,766

Tableau 2 : Fréquences non dimensionnelles, différents cas d'appuis. $L/h = 10$. $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

Poutre	mode	1	2	3	4	5
Simplement appuyée	Réf [2]	2,3189	7.0171	12.132	17.301	22.533
	Réf [3]	2,3194	7.0029	12.037	17.015	21.907
	présente	2.3123	6.9676	11.9613	16.9264	21.8892
Encastrée Encastrée	Réf [2]	3.7751	8.044	12.998	18.165	23.502
	Réf [3]	3.7576	7.8718	12.573	17.373	22.200
	présente	5.5514	11.4581	17.0695	22.3742	27.5154
Encastrée Libre	Réf [2]	0.8891	4.1792	9.1916	12.4132	14.384
	Réf [3]	0.8819	4.0259	9.1085	12.193	14.08
	présente	0.8739	4.0939	8.7136	13.5557	15.4973

Tableau 3 : Fréquences fondamentales non dimensionnelles ϖ . $L/h = 15$. $[0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ]$.

Afin de suivre la même présentation que les résultats

Poutre	Encastrée - Libre	Encastrée - Appuyée	Encastrée – Encastrée
Réf. [4]	0.9215	3.5183	4.5869
présente	0.91308	3.9191	5.687

obtenus par Yildirim et al réf [4], le tableau 3 reporte, pour les autres cas d'appuis, la fréquence fondamentale sous forme non dimensionnelle. Le paramètre de fréquence étant $\varpi = \sqrt{(\rho/E_1 h^2)} \omega L^2$. Dans ce cas encore, les résultats obtenus valident clairement la solution théorique développée précédemment.

3. CONCLUSION

Dans cet article, on a élargi l'application de l'approche d'homogénéisation aux poutres composites multicouches symétriques à plis croisés disposés symétriquement par rapport à l'axe neutre afin de calculer leurs fréquences et modes propres. La solution théorique obtenue a été validée avec succès dans le cas de la poutre simplement appuyée et la console.

Dans le cas de la poutre encastrée d'un coté et simplement appuyée de l'autre, les résultats obtenus sont légèrement au dessus des valeurs trouvées dans la littérature.

Dans le cas de la poutre doublement encastrée, les valeurs trouvées sont assez bonnes pour les deux premiers modes puis deviennent de moins en moins précises pour les modes supérieurs.

Ces comparaisons ont permis d'une part de vérifier la validité du modèle proposé, et d'autre part de montrer que pour un ordre de précision sensiblement équivalent à celui donné par un calcul par éléments finis ou par la méthode des matrices de transfert, le modèle simple que nous avons développé s'est avéré suffisant et satisfaisant pour les cas étudiés.

4. REFERENCES

- [1] Chandrashekhara K., Krishnamurthy K., Roy S., (1990), "Free vibration of composite beams including rotary inertia and shear deformation." Composites and Structures, 14, pp 269-279
- [2] Singh M.P., Abdelnaser A.S., (1992). "Random response of symmetric cross-ply composite beams with arbitrary boundary conditions." American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 30(4).
- [3] Abramovitch H., Livshits A., (1994). "Free vibrations of non symmetric cross ply laminated composite beams." Journal of sound and vibration, 176(5), pp 597 – 612.
- [4] Yildirim, V. Sancaktar, E. Kiral, E. (1999). "Free vibration analysis of symmetric cross-ply laminated composite beams with the help of the transfer matrix approach", Communication in Numerical Methods in Engineering, 15: 651-660
- [5] Aouissate K. (décembre 2004). "Modèle de prédiction des fréquences propres des poutres composites multicouches symétriques", Revue Sciences et Technologie B – n°22 Université Mentouri, Constantine, Algérie, pp 98 – 102.
- [6] Aouissate K. (2002). "Programmation et calcul des poutres composites multicouches symétriques", 2^{ème} Colloque Maghrébin en Génie Civil, Université Mohamed Khider, Biskra, Algérie, 31-37.
- [7] Paz.M. (1997), "Structural dynamics." Van North, Chapman Hall.