

## ETUDE AUX VALEURS PROPRES DES PLAQUES ET COQUES RECTILIGNES PAR LA METHODE DES BANDES FINIES

M. BELGASMIA<sup>1</sup>, M. GUENFOUD<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Département de Génie Civil, Faculté des Sciences de l'Ingénieur - Université de Béjaïa – Algérie

<sup>2</sup> Département de Génie Civil, Faculté des Sciences de l'Ingénieur - Université de Guelma - Algérie

Reçu le 09/06/2008 – Accepté le 15/03/2010

### Résumé

Cet article présente l'analyse d'une classe de structures en cas dynamique par la méthode des bandes finies. Cette méthode consiste à subdiviser la structure en des éléments appelés bandes finies. Ces bandes se caractérisent par deux directions, l'une transversale discrétisée par élément finis et l'autre, privilégiée, longitudinale discrétisée par séries de Fourier.

Le but de ce travail est de formuler et implanter les matrices de rigidité  $[K_0]$  et de masse  $[M]$  pour les éléments des bandes finies à deux, trois et quatre nœuds; pour le calcul en vibration propre des structures formées de plaques ou de coques d'épaisseur mince ou épaisse.

Les résultats obtenus sur de nombreux exemples sont comparés avec d'autres résultats numériques (STAAD III et \ SAP2000), ces derniers révèlent certaines réalités indéniables qui prouvent la fiabilité et l'efficacité des éléments développés.

**Mots clés :** *Eléments finis, bandes finies, analyse semi analytique, séries de Fourier, plaque, coque..*

### Abstract

This article presents an analysis of a class of structures called stright in case of natural vibration by use of the finite strips method. The aim of such method is to subdivide the structure in to elements called finite strips. This strips are two-directional; one transversal discretised by finite element, and the other, privileged, longitudinal discretised by Fourier's series.

The objective of the present work is to formulate and implement the stiffness matrix  $[K_0]$  and mass matrix  $[M]$  for the elements of finite strip of with two three and four nodes, in order to calculate eigenvalue of thin and thick stright plate and shell structures.

The achieved results on a number of examples compared to other numerical results (STAAD&\SAP2000), this latter results reveal some undeniable evidence which prove the reliability and efficiency of the developed elements.

**Keywords :** *Finite elements, finite strips, semi analytical analysis, Fourier's series, plate, shell.*

### ملخص

هذا المقال يقدم تحليل خطي حركي لصنف من الهياكل باستعمال طريقة الشرائط المحدودة هذه الطريقة تكمن في تقسيم الهيكل إلى عناصر تسمى شرائط محدودة، التي تتميز باتجاهين؛ إحداهما عرضية منقسمة بعناصر محدودة، و الأخرى طولية منقسمة بمتسلسلات فورييه

الهدف من هذا العمل هو صياغة و إدخال مصفوفتي الصلابة و الكتلة لعناصر شرائط محدودة ذات عقدتين ثلاثة أو أربع عقد، من أجل حساب الاهتزاز الذاتي للهياكل المتكونة من الصفائح و القواقع الرقيقة و السمكية.

النتائج المحصل عليها من خلال العديد من الأمثلة، قورنت مع نتائج عديدة. أنها تبرهن على فعالية و فائدة العناصر المستعملة

**الكلمات المفتاحية :** *العناصر المحدودة ، الشرائط المحدودة ، التحليل نصف تحليلي ، متسلسلات فورييه ، الصفائح ، القواقع*

L'apparition de l'outil informatique et des équipements de tests, à permis de franchir un grand pas dans le domaine d'analyse des structures. Ceci peut être observé par le nombre important des différents ouvrages et rapports d'études expérimentales et analytiques sur la dynamique des structures. La plupart de ces recherches porte essentiellement sur l'évaluation des propriétés dynamiques (fréquences vibratoires et modes propres) [1]. Ces propriétés seront déterminées par l'intermédiaire des méthodes numériques par une simple modélisation de la structure. Parmi ces méthodes numériques, il faut citer bien sûr la méthode des éléments finis qui reste l'une des plus puissantes méthodes de résolution des problèmes dynamiques. En dépit du large champ d'application et la performance des éléments finis, les chercheurs continuent à mettre au point de nouveaux éléments plus économiques et plus précis. Les méthodes semi-analytiques constituent une branche de recherche qui peut répondre à de tels besoins [2], [3], [4].

### 1. THEORIE DES PLAQUES ET COQUES

Une coque est un solide dont le volume  $V$  est engendré par la surface moyenne  $A$ , et sa normale  $n$  s'étendant d'une distance  $t/2$  de chaque côté de cette dernière.

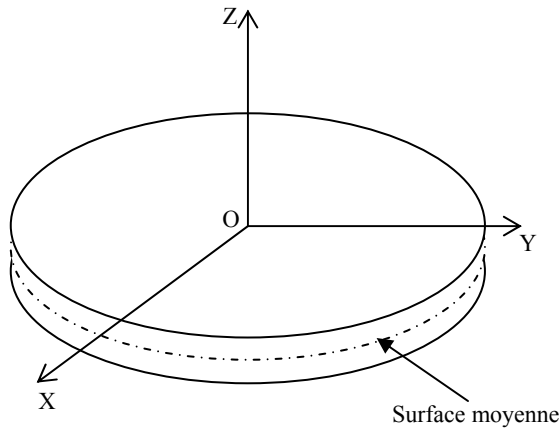


Figure 1 : Portion d'une Plaque.

L'épaisseur de la coque est petite par rapport aux quantités géométriques qui la caractérisent [5] (figures 1 et 2).

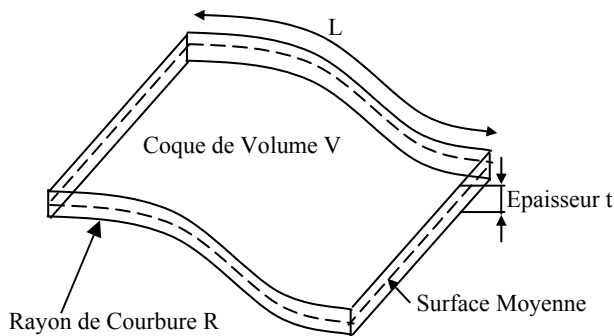


Figure 2 : Courbure de Forme quelconque.

#### 1.1 Descriptions du Champ de déplacements d'un élément de plaque

Dans la théorie de Hencky [6], [7], on se donne un modèle de déplacements basé sur trois variables indépendantes : le déplacement transverse  $w(x,y)$  et les rotations  $\theta_x$  et  $\theta_y$  (figure 3) comme suit:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= Z\theta_x(x, y) \\ V(x, y) &= Z\theta_y(x, y) \\ W(x, y) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (1)$$

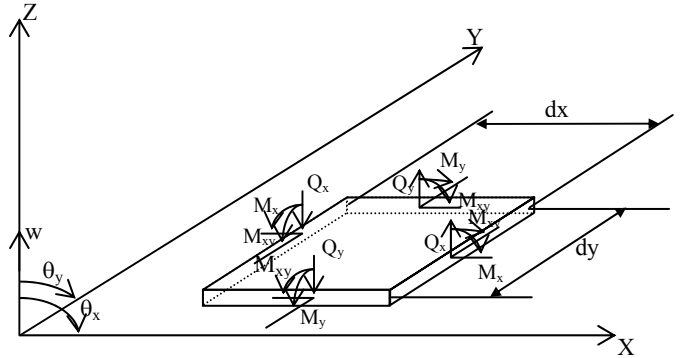


Figure 3 : Portion élémentaire d'une plaque rectangulaire

#### 1.2 Descriptions du Champ de déformations d'un élément de plaque

Le tenseur de déformations [6], [7] s'écrit :

$$\{\mathcal{E}\} = \left\{ \left\{ \mathcal{E}_b \right\}^T, \left\{ \mathcal{E}_s \right\}^T \right\}^T = \left\{ z \left\{ \bar{\mathcal{E}}_b \right\}^T, \left\{ \mathcal{E}_s \right\}^T \right\}^T \quad (2)$$

Avec

$$\left\{ \bar{\mathcal{E}}_b \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_x}{\partial X} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial Y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial Y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial X} \end{array} \right\} \quad (3)$$

$$\left\{ \mathcal{E}_s \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \theta_x + \frac{\partial W}{\partial X} \\ \theta_y + \frac{\partial W}{\partial Y} \end{array} \right\} \quad (4)$$

D'où on peut écrire  $\left\{ \bar{\mathcal{E}} \right\} = \left\{ \left\{ \bar{\mathcal{E}}_b \right\}^T, \left\{ \mathcal{E}_s \right\}^T \right\}^T$

#### 1.3 Descriptions du Champ de déplacements d'un élément de coque

Le comportement de la portion élémentaire D'une coque est la superposition d'un comportement en membrane et de plaque en flexion [5].

Dans un repère orthonormé local (s,n,t) les déplacements s'écrivent (figure 4):

$$\begin{aligned} U(s, t, n) &= U_0(s, t) + n\theta_s(s, t) \\ V(s, n, t) &= V_0(s, t) + n\theta_t(s, t) \\ w(s, t, n) &= w(s, t) \end{aligned} \quad (5)$$

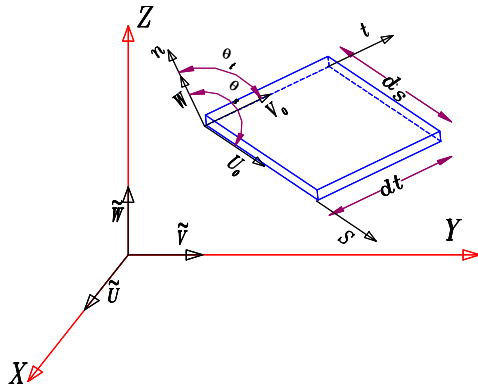


Figure 4 : Portion d'une coque

### 1.4 Descriptions du Champ de déformations d'un élément de coque

Il peut être décomposé en :

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{matrix} \{\varepsilon_m\} \\ \{0\} \\ \{\varepsilon_s\} \end{matrix} \right\} + \left\{ n \{\bar{\varepsilon}_b\} \right\} \quad (6)$$

$$\{\varepsilon_m\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial U_0}{\partial s} \\ \frac{\partial V_0}{\partial t} \\ \frac{\partial U_0}{\partial t} + \frac{\partial V_0}{\partial s} \end{matrix} \right\} \quad (7)$$

$$\{\bar{\varepsilon}_b\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{\partial \theta_s}{\partial s} \\ \frac{\partial \theta_t}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta_s}{\partial t} + \frac{\partial \theta_t}{\partial s} \end{matrix} \right\} \quad (8)$$

$$\{\varepsilon_s\} = \left\{ \begin{matrix} \theta_s + \frac{\partial W}{\partial s} \\ \theta_t + \frac{\partial W}{\partial t} \end{matrix} \right\} \quad (9)$$

$\{\varepsilon_m\}, \{\bar{\varepsilon}_b\}, \{\varepsilon_s\}$  sont respectivement les tenseurs de déformations de membrane, de flexion et de cisaillement[3],[5].

Le tenseur des déformations généralisées est défini par

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \left\{ \{\varepsilon_m\}^T, \{\bar{\varepsilon}_b\}^T, \{\varepsilon_s\}^T \right\}^T$$

## 2. Modélisation des plaques et coques par la méthode des bandes finies

La méthode des bandes finies est appliquée à l'analyse des coques, ces dernières peuvent être subdivisées en des éléments inclinés courbes ou droits. Chaque élément bande possède un repère local (s, t, n) faisant un angle  $\phi$  avec le repère global (X, Y, Z) (figures 5 a,b ,c et d) et ayant l'axe parallèle à y [2], [3].

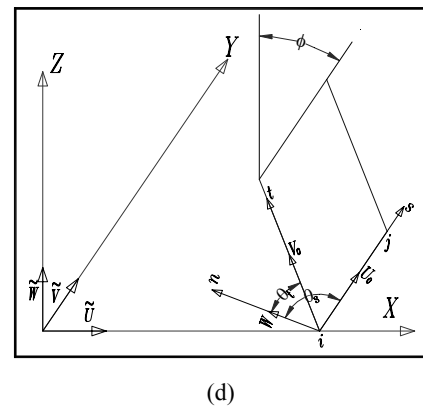
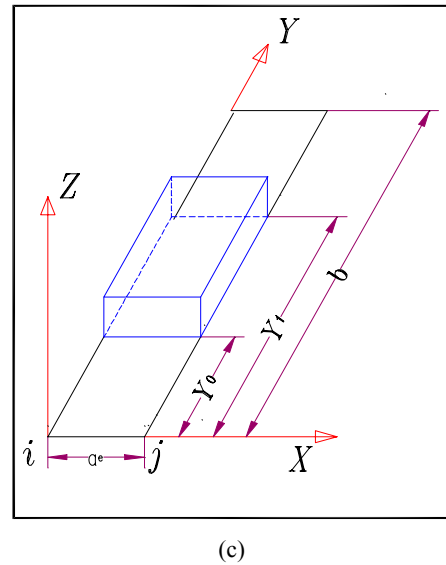
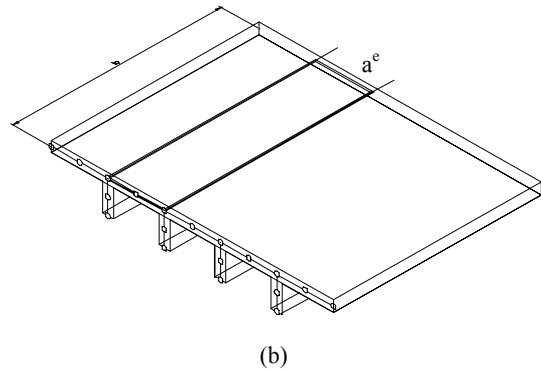
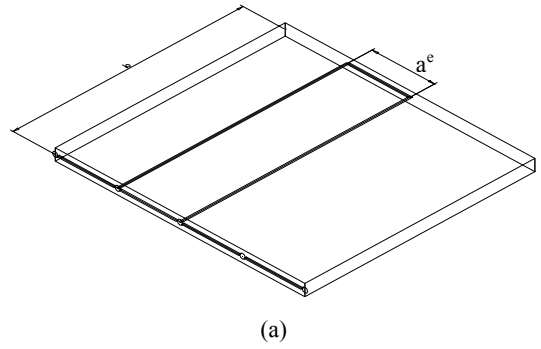


Figure 5 : (a) Plaque rectiligne ; (b) Coque rectiligne ; (c) Élément bandes de plaque rectiligne ; (d) Élément de coque rectiligne.

## 2.1. Discrétisation du Champ de déplacement et de vitesse d'un élément de plaque

$$w(x, y) = \sum_{l=1}^{nh} w^l(x) \sin l\gamma$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{l=1}^{nh} \theta_x^l(x) \sin l\gamma \quad (10)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{l=1}^{nh} \theta_y^l(x) \cos l\gamma$$

$$w^l(x) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i w_i^l$$

$$\theta_x^l(x) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \theta_{xi}^l \quad (11)$$

$$\theta_y^l(x) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i \theta_{yi}^l$$

Après substitution de (11) dans (10) nous pouvons écrire

$$\{U(x, y, t)\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [N_i^l(x, y)] \{a_i^l(t)\} \quad (12)$$

$$\{\dot{U}(x, y, t)\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [N_i^l(x, y)] \{\dot{a}_i^l(t)\} \quad (13)$$

Où

$$\{U(x, y, t)\} = \{w, \theta_x, \theta_y\}^t \quad (14)$$

$$\{\dot{U}(x, y, t)\} = \{\dot{w}, \dot{\theta}_x, \dot{\theta}_y\}^t \quad (15)$$

Avec

$$\{a_i^l(t)\} = \{w_i^l, \theta_{xi}^l, \theta_{yi}^l\}^t \quad (16)$$

$$\{\dot{a}_i^l(t)\} = \{\dot{w}_i^l, \dot{\theta}_{x(r)i}^l, \dot{\theta}_{y(r)i}^l\}^t \quad (17)$$

$$[N_i^l] = \begin{bmatrix} N_i \sin l\gamma & 0 & 0 \\ 0 & N_i \sin l\gamma & 0 \\ 0 & 0 & N_i \cos l\gamma \end{bmatrix} \text{ où } \gamma = \frac{\pi y}{b} \quad (18)$$

$[N_i^l]$  est la matrice des fonctions de forme  $\{a_i^l\}$  et  $\{\dot{a}_i^l\}$  sont respectivement les amplitudes de déplacement et de vitesse associés au nœud  $i$  à la  $l^{\text{ème}}$  harmonique [2],[3].

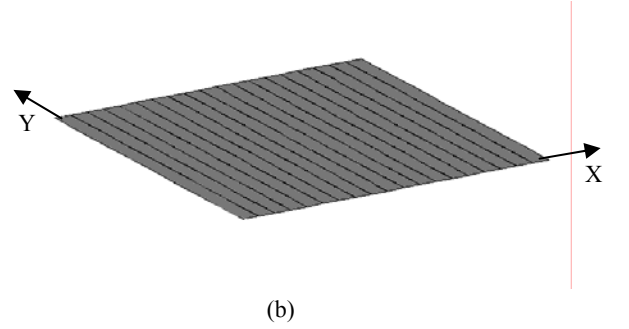
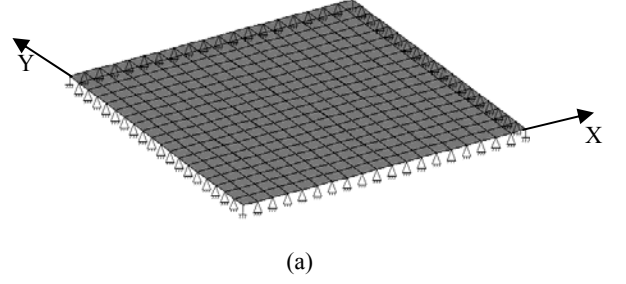
## 2.2 Discrétisation du Champ de déformation d'un élément de plaque (figure 6)

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [B_i^l] \{a_i^l\} \quad (19)$$

$$[B_i^l] = \begin{bmatrix} [B_{bi}^l] \\ [B_{si}^l] \end{bmatrix} \text{ où} \quad (20)$$

$$[B_{bi}^l] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin l\gamma & 0 \\ 0 & 0 & -N_i \frac{l\pi}{b} \sin l\gamma \\ 0 & N_i \frac{l\pi}{b} \cos l\gamma & \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos l\gamma \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$[B_{si}^l] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin l\gamma & N_i \sin l\gamma & 0 \\ N_i \frac{l\pi}{b} \cos l\gamma & 0 & N_i \cos l\gamma \end{bmatrix} \quad (22)$$



$E = 207 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ $\nu = 0.3$ $t = 0.01 \text{ m}$ $a = 0.9 \text{ m}$ $b = 0.9 \text{ m}$
--

**Figure 6 :** (a) Discrétisation en éléments finis (dessinée par STAADIII); (b) Discrétisation en bandes finis (dessinée par STAADIII); Plaque rectiligne simplement supportée sur ses quatre côtés.

## 2.3 Discrétisation du Champ de déplacement et de vitesse d'un élément de coque (figure 6)

Le vecteur de déplacements d'un point dans un élément de coque est défini par cinq variables dans le repère (s,n,t) [5]. L'approche préconisée dans l'analyse des déplacements de l'élément est la suivante :

$$\{U\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [N_i] \{a_i^l\} \quad (23)$$

$$\{\dot{U}\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [N_i] \{\dot{a}_i^l\} \quad (24)$$

$$\{U\} = \{U_0, V_0, W, \theta_s, \theta_t\}^t \quad (25)$$

$$\{\dot{U}\} = \{\dot{U}_0, \dot{V}_0, \dot{W}, \dot{\theta}_s, \dot{\theta}_t\}^t \quad (26)$$

$$\{a_i^l\} = \{U_{0i}^l, V_{0i}^l, W_i^l, \theta_{si}^l, \theta_{ti}^l\} \quad (27)$$

$$\{\dot{a}_i^l\} = \{\dot{U}_{0i}^l, \dot{V}_{0i}^l, \dot{W}_i^l, \dot{\theta}_{si}^l, \dot{\theta}_{ti}^l\} \quad (28)$$

$$[N_i^l] = \begin{bmatrix} N_i \sin l\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i \cos l\gamma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i \sin l\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_i \sin l\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i \cos l\gamma \end{bmatrix} \quad (29)$$

$[N_i^l]$  est la matrice des fonctions de forme  $\{a_i^l\}$  et  $\{\dot{a}_i^l\}$  sont respectivement les amplitudes de déplacement et de vitesse associés au nœud  $i$  à la  $l^{\text{ème}}$  harmonique [3].

## 2.4 Discrétisation du Champ de déformation d'un élément de coque (figure 6)

$$\{\bar{\varepsilon}\} = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} [B_i^l] \{a_i^l\} \quad (30)$$

$$[B_i^l] = \begin{bmatrix} [B_{mi}^l] \\ [B_{bi}^l] \\ [B_{si}^l] \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$[B_{mi}^l] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial S} \sin l\gamma & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -N_i \frac{l\pi}{b} \sin l\gamma & 0 & 0 & 0 \\ N_i \frac{l\pi}{b} \cos l\gamma & \frac{\partial N_i}{\partial S} \cos l\gamma & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$[B_{bi}^l] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial S} \sin l\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i \frac{l\pi}{b} \sin l\gamma \\ 0 & 0 & 0 & N_i \frac{l\pi}{b} \cos l\gamma & \frac{\partial N_i}{\partial S} \sin l\gamma \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$[B_{si}^l] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial S} \sin l\gamma & N_i \sin l\gamma & 0 \\ 0 & 0 & N_i \frac{l\pi}{b} \cos l\gamma & 0 & N_i \cos l\gamma \end{bmatrix} \quad (34)$$

## 3. CONSTRUCTION DE LA MATRICE DE RIGIDITE ET DE MASSE

L'énergie potentielle totale et l'énergie cinétique d'un système élastique [6],[7],[8] est :

$$\pi = \sum_{\text{élément}} \pi^e = \sum_{\text{élément}} \frac{1}{2} \int_{V_e} \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} dV + \sum_{\text{élément}} \frac{1}{2} \rho \int_{V_e} \{\dot{U}_e\}^T \{\dot{U}_e\} dV \quad (35)$$

L'énergie de déformation est :

$$\frac{1}{2} \int_{A_e} \left( \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} \{a_i^l\}^T [B_i^l]^T [D] \sum_{l=1}^{nh} \sum_{j=1}^{n_e} \{a_j^l\} [B_j^l] \right) dA \quad (36)$$

L'énergie cinétique est :

$$\frac{1}{2} t \rho \int_{A_e} \left( \sum_{l=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} \{\dot{a}_i^l\}^T [N_i^l]^T \sum_{l=1}^{nh} \sum_{j=1}^{n_e} \{\dot{a}_j^l\} [N_j^l] \right) dA \quad (37)$$

En tenant compte des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et en appliquant le principe de Lagrange [6],[9] on a :

$$\pi^e = \sum_{l=1}^{nh} \sum_{m=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} \{a_i^l\}^T [K_{ij}^{lm}]^T \{a_j^m\} + \sum_{l=1}^{nh} \sum_{m=1}^{nh} \sum_{i=1}^{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} \{\dot{a}_i^l\}^T [M_{ij}^{lm}]^T \{\dot{a}_j^m\} \quad (38)$$

**Rigidité liant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$  : Masse liant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$**

$$[K_{ij}^{lm}] = \begin{cases} \frac{C}{2} \int_0^a [B_i^l]^T [D] [B_j^m] R dS & \text{pour } l = m \\ 0 & \text{pour } l \neq m \end{cases} \quad (39)$$

$$[M_{ij}^{lm}] = \begin{cases} \frac{C}{2} \rho t \int_0^a [N_i^l]^T [N_j^m] R dS & \text{pour } l = m \\ 0 & \text{pour } l \neq m \end{cases} \quad (40)$$

La transformation des déplacements au repère global engendre l'apparition d'un sixième degré de liberté; celui de la rotation autour de l'axe  $z$ , le passage du repère globale se fait la matrice de transformation  $[T^{(e)}]$  [3],[8].

$$T^{(e)} = \begin{bmatrix} \sin \phi & 0 & -\cos \phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \phi & \cos \phi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \phi & \sin \phi \end{bmatrix} \quad (41)$$

Transformation des déplacements

$$\bar{a}_l^L = T^{(e)} a_l^L \quad (42)$$

$$\bar{a}_l^L = [\bar{U}_l^L \quad \bar{V}_l^L \quad \bar{W}_l^L \quad \theta_{xl}^L \quad \theta_{yl}^L \quad \theta_{zl}^L]^T \quad (43)$$

avec :

$$a_l^L = [U_l^L \quad V_l^L \quad W_l^L \quad \theta_{sl}^L \quad \theta_{tl}^L \quad 0]^T \quad (44)$$

Transformation de la rigidité et de la masse

$$[\bar{K}_{ij}^{ll}]^e = T^{(e)} K_{ij}^{ll} [T^{(e)}]^T \quad [\bar{M}_{ij}^{ll}]^e = T^{(e)} M_{ij}^{ll} [T^{(e)}]^T$$

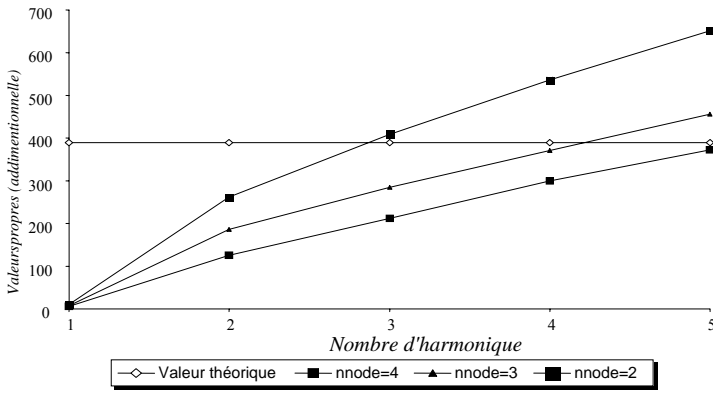
Avec :

$$K_{ij}^{ll} (6 \times 6) = \begin{bmatrix} K_{ij}^{ll} (5 \times 5) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{ij}^{ll} (6 \times 6) = \begin{bmatrix} M_{ij}^{ll} (5 \times 5) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

## 4. DISCUSSION DES RESULTATS

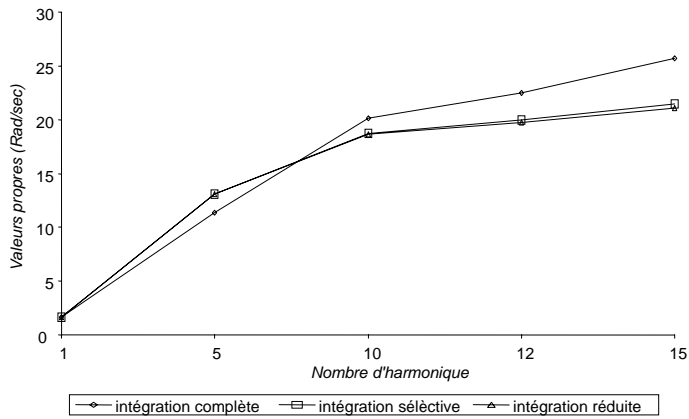
Afin de mettre en évidence la convergence de la solution en fonction de nombre d'harmonique, nous avons comparé les résultats numériques avec ceux de l'analytique. L'objectif de cette application est de faire une étude comparative entre la méthode des bandes finies et celle des éléments finis.

Nous déduisons de la figure 7 qu'avec l'utilisation des éléments à quatre nœuds et d'une intégration sélective la convergence de la plaque carrée est obtenue à la 5<sup>ème</sup> harmonique.



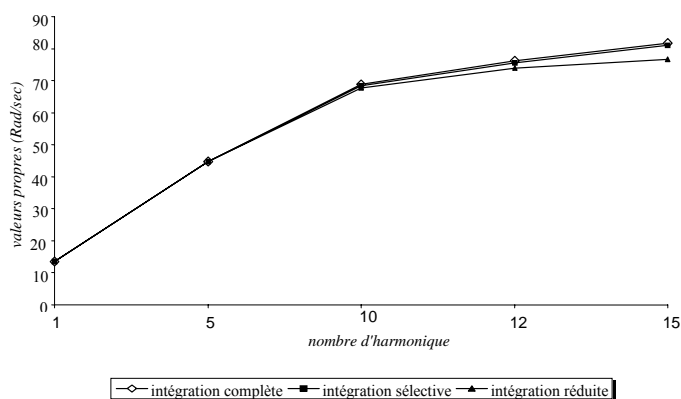
**Figure 7 :** Plaque carrée mince simplement appuyée sur ses quatre bords (intégration sélective).

Les structures ayant un rapport  $t/b$  faible (mince), représentée dans la figure 8, nécessitent une intégration réduite ou sélective pour éviter le phénomène de verrouillage.



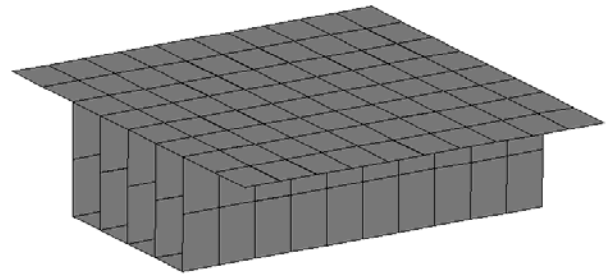
**Figure 8 :** Plaque carrée mince rectiligne simplement appuyée sur ses quatre bords.

Pour ce type de structures, l'ordre d'intégration est très important, contrairement à des structures épaisses figure 9. Résultat qui confirme la théorie sur laquelle le code de calcul repose.

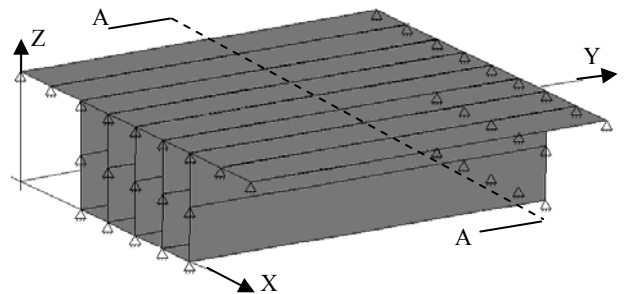


**Figure 9 :** Plaque carrée épaisse rectiligne simplement appuyée sur ses quatre bords.

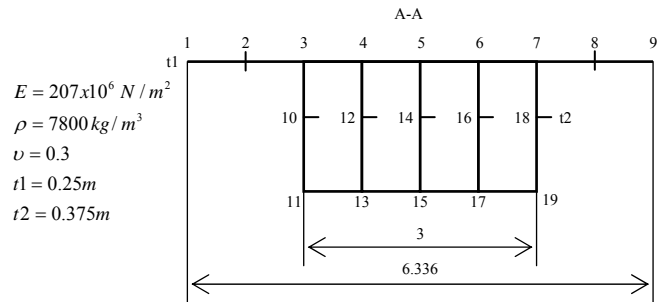
Les ponts à caisson droit, de la figure 10 sont traités par la méthode des bandes finies et par le code de calcul STAAD en utilisant des éléments coques minces quadrilatères à quatre nœuds.



(a)

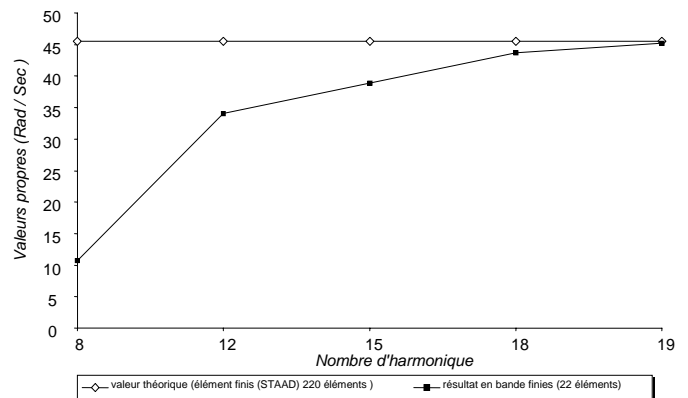


(b)



**Figure 10 :** (a) Discrétisation en élément finis (dessinée par STAADIII) ; (b) Discrétisation en bandes finies (dessinée par STAADIII) ; Coque rectiligne simplement appuyée sur ses deux bords opposés.

La figure 11 représente la convergence d'un pont à caisson rectiligne discrétisé par élément finis en 22 éléments et par bandes finies en 22 éléments bandes : elle est atteinte à la 19<sup>ème</sup> harmonique.



**Figure 11 :** Coque simplement appuyée sur ses deux bords opposés (intégration réduite).

## CONCLUSION GENERALE

Cette analyse dynamique dans le cas des vibrations libres non amorties des différents types de structures étudiées comporte la formulation de la méthode des bandes finies, et l'élaboration d'un programme pour le calcul des pulsations et des modes propres de vibration.

Les résultats obtenus nous révèlent certaines réalités indéniables, ainsi l'utilisation des éléments à deux nœuds résulte sur des divergences très nettes, à l'opposé des éléments à trois et quatre nœuds, ils offrent des résultats performants.

Il en est de même pour l'ordre d'intégration, dont on note l'importance pour les structures minces, mais qui est insignifiante pour le cas des structures épaisses.

Il nous faut reconnaître à l'usage de la technique de semi-discrétisation utilisant conjointement les séries orthogonales de Fourier et la discrétisation en élément finis de certains avantages dont :

- le nombre de degrés de liberté par ligne nodale dans cette méthode est toujours inférieur ou égal à celui qu'exige la méthode des éléments finis ;
- le nombre de termes (harmoniques) utilisés dans la série de fonction est toujours inférieur au nombre d'éléments de la méthode classique des éléments finis.
- la taille réduite des systèmes d'équation ;
- le gain considérable en espace mémoire et temps de calcul.

Le code développé permet la possibilité d'élargir la technique semi-analytique à l'étude des structures courbes, la non-linéarité géométrique, l'inhomogénéité matérielle et conditions aux limites qui exigent un couplage d'harmonique.

Signalons enfin que le développement proposé, quoique présenté dans le cadre particulier des séries de trigonométrie, peut aisément être généralisé à d'autres séries de fonction orthogonales (hyperbolique).

## REFERENCE

- [1] Klaus-Jürgen Bathe - Finite Element Procedures - 1996 by prentice-Hall, Inc. A Simon and Schusters company Englewood Cliffs, New Jersey 07632.
- [2] K. Y. Cheung - The finite strip method in the Analysis of elastic plate wite two opposite simple supported ends - PICE 40 pp 1-7 1968
- [3] R. Hinton D.R.J. Owen – Finite Element software for Plates and Shells - Department of Civil Engineeering. University College Swansea U.K 1984
- [4] N.Guenoun. - méthode de semi-discrétisation pour l'étude de la stabilité des coques - Université de Liège 1987.
- [5] J.L. Batoz . G.Dhatt - Modélisation des structures par élément finis - Volume 3, Hermès Paris 1992.
- [6] J.- F. Imbert – Analyse des Structures par Eléments finis – 3<sup>ème</sup> Edition Cépaduès ,Toulouse, janvier 1991.
- [7] J.L. Batoz . G.Dhatt - Modélisation des structures par élément finis - Volume 2 , Hermès Paris octobre 1990.

- [8] J.-C. Craveur - Modélisation des structures Calcul par éléments finis Masson, Paris, 1996 .
- [9] Clough. R.W , Penzien.J. – Dynamique des structures- Tome I Edition Pluralis, 1980.

## NOTATION

- $a^e$  Largeur de l'élément bande.
- $b$  Longueur de l'élément bande droit.
- $\{a_i^l\}$  Vecteur des déplacements aux nœuds  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $\{\dot{a}_i^l\}$  Vecteur des vitesses aux nœuds  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $A^e$  Surface d'un élément bande.
- $[B_i^l]$  Matrice reliant les déformations aux déplacements du nœud  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $[B_{mi}^l]$  Matrice reliant les déformations de membrane aux déplacements du nœud  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $[B_{bi}^l]$  Matrice reliant les déformations de flexion aux déplacements du nœud  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $[B_{si}^l]$  Matrice reliant les déformations de cisaillement aux déplacements du nœud  $i$  à l'harmonique  $l$ .
- $[K_{ij}^{ll}]$  Matrice de rigidité connectant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$ .
- $[\bar{K}_{ij}^{ll}]$  Matrice de rigidité connectant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$  transformée au repère globale.
- $[M_{ij}^{ll}]$  Matrice de masse connectant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$ .
- $[\bar{M}_{ij}^{ll}]$  Matrice de masse connectant les nœuds  $i$  et  $j$  à l'harmonique  $l$  transformée au repère globale.
- $N_i$  Fonction de forme.
- $n_i$  Tenseur de la normale à la surface.
- $nh$  Nombre de termes de la série harmonique.
- $n_e$  Nombre de nœuds dans un élément .
- $s,t,n$  Coordonnées du repère local de l'élément.
- $[T]^e$  Matrice de transformation au repère globale d'un élément (e).
- $\{U\}$  Vecteur des déplacements.
- $\{\dot{U}\}$  Vecteur des vitesses.
- $U$  Energie potentielle de déformation.
- $u, v$  Déplacement dans le plan de l'élément.
- $u_0, v_0$  Déplacement de membrane dans le plan de l'élément.
- $W$  Déplacement transversal au plan de l'élément.
- $X, Y, Z$  Coordonnées du repère globale de la structure.
- $\{\mathcal{E}\}$  Vecteur des déformations.

$\{\mathcal{E}_m\}$  Vecteur des déformations de membrane.

$\{\mathcal{E}_b\}$  Vecteur des déformations de flexion.

$\{\mathcal{E}_s\}$  Vecteur des déformations de cisaillement transversal.

$\mathcal{E}_{ij}$  Tenseur de déformations.

$\theta_x, \theta_y$  Rotation dans les plans (z,x) et (z,y) respectivement.

$\theta_s, \theta_t$  Rotation dans les plans (n,s) et (n,t) respectivement.

$\pi$  Energie totale.

$\pi^e$  Energie totale élémentaire.

$\rho$  Masse volumique du matériau.

**ANNEXE**

**Obtention directe des fonctions de formes**

$$N_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (x - x_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (x_i - x_j)}$$

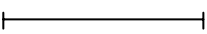
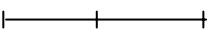

**Sous forme développée**

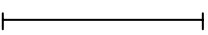
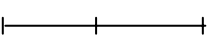

$$N_i = \frac{(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_{m+1})}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_{m+1})}$$

⋮

⋮

$$N_{m+i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_m)}{(x_{m+1} - x_1)(x_{m+1} - x_2) \dots (x_{m+1} - x_m)}$$

<i>Règle d'intégration de Gauss pour la matrice de rigidité</i>						
<i>Type d'élément</i>	<i>Intégration complète</i>		<i>Intégration sélective</i>		<i>Intégration réduite</i>	
	$\begin{bmatrix} [K_m^{ll}] \\ [K_b^{ll}] \end{bmatrix}$	$[K_s^{ll}]$	$\begin{bmatrix} [K_m^{ll}] \\ [K_b^{ll}] \end{bmatrix}$	$[K_s^{ll}]$	$\begin{bmatrix} [K_m^{ll}] \\ [K_b^{ll}] \end{bmatrix}$	$[K_s^{ll}]$
	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>
	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>2</b>	<b>2</b>
	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>3</b>	<b>3</b>

<i>Règle d'intégration de Gauss pour la matrice de masse</i>	
<i>Type d'élément</i>	<i>Intégration complète</i>
	$[M_{ij}^{ll}]$
	<b>2</b>
	<b>3</b>
	<b>4</b>