

ANALYSE DU COMPORTEMENT VIBRATOIRE DE PLAQUES COMPOSITES SOUS L'EFFET DE DIFFERENTS PARAMETRES DE RENFORCEMENT ET DE CONFIGURATION

Reçu le 28/01/2008 – Accepté le 15/09/2011

Résumé

Cette contribution consiste en l'analyse du comportement vibratoire libre de plaques composites en Bore/époxyde à différentes séquences d'empilement. L'étude de la vibration en flexion de telles structures repose essentiellement sur la recherche des fréquences et des modes propres. L'équilibre dynamique est régié par un système d'équations aux dérivées partielles obtenues soit par une formulation directe ou par la méthode des puissances virtuelles ou soit encore par le principe de Hamilton. Dans le cas des stratifiés généralement orthotropes ou lorsque les plaques sont encastées, les méthodes approximatives telles que celles de Ritz ont été appliquées.

L'axe principal de cette étude est la mise en valeur et la discussion des effets de l'angle d'orientation des fibres de renforcement, du rapport d'orthotropie du matériau, du nombre de couches composantes et de la géométrie de la plaque sur les fréquences d'oscillation.

Mots clés : *Matériau Composite ; vibration libre ; fréquence ; conditions aux limites*

Abstract

This contribution consists of the free vibratory behavior analysis of composite plates in Bore/epoxy with various stacking sequences. The study of the vibration in bending of such structures rests primarily on the research of the frequencies and the clean modes. The dynamic balance is governed by a system of partial derivative equations obtained either by a direct formulation or the virtual powers method or either again by the Hamilton's principle. In the case of the generally orthotropic laminates or when the plates are embedded, the approximate methods such as those of Ritz have been applied.

The main axis of this study is the enhancement and the discussion of the effects of the reinforcement fibers orientation, the ratio orthotropy of the material, the number of component layers and the plate geometry on the oscillation frequencies.

Keywords : *Composite material ; free vibration ; frequency ; boundary conditions*

¹ L. BOUYAYA

² F. MILI

¹ A. LEKRINE

¹ Département de Génie
Mécanique

Université 20 Aout 1955
Skikda – Algérie

² Laboratoire de Mécanique
Faculté des Sciences de l'Ingénieur
Université Mentouri
Constantine – Algérie

ملخص

هذه الدراسة تهتم بتحليل الاهتزازات الحرة للصفائح المركبة متعددة الطبقات ذات (بور/ ايبوكسيد). إن دراسة الاهتزازات المنحنية لمثل هذه البنيات تعتمد اساسا على البحث عن التواتر (التردد) و النمط الطبيعي الموافق لها التوازن الديناميكي معرف بواسطة نظام معادلات المشتقات الجزئية التي تم الوصول اليها بواسطة الطريقة المباشرة او باستعمال طريقة هاميلتون. في حالة الصفائح المركبة المثبتة من الاربع جوانب فانه قد تم استعمال الطرق التقريبية كطريقة ريتز.

ان المحور الاساسي لهذه الدراسة هو تعيين و مناقشة تأثير زاوية توجيه الخيوط التعزيزية , معاملات الترابط , عدد الطبقات , و شكل الصفيحة على التواتر الاهتزازي.

الكلمات المفتاحية: المواد المركبة ؛ الاهتزازات الحرة ؛ التواتر ؛ الشروط الحدودية.

Les matériaux composites unidirectionnels allient les propriétés d'un renfort fibreux et d'une matrice organique, ce qui leur confère d'excellentes performances mécaniques. De par leur bonne tenue à la fatigue statique et dynamique, leur haut degré d'amortissement des vibrations, les composites sont des matériaux idéaux dans la fabrication de nombreuses pièces mécaniques et de plusieurs articles de sport et de loisirs. Encore plus légers que les alliages d'aluminium, ils sont incomparablement meilleurs sous sollicitations cycliques surtout dans des applications aéronautiques, aérospatiales et maritimes. Le contrôle des vibrations de telles structures pose fréquemment un problème important dont la détermination des caractéristiques dynamiques sous différentes conditions de renforcement et de configuration est nécessaire.

Différentes études ont été entreprises par l'utilisation de plusieurs approches mathématiques [1, 2]. Hearmon [3] a appliqué la méthode de Rayleigh-Ritz pour déterminer les caractéristiques dynamiques des plaques symétriques orthotropes à différentes conditions aux frontières. De plus, Bert et Birman [4] ont procédé à l'étude de la vibration des stratifiés antisymétriques généralement orthotropes à différentes séquences d'empilement. En outre, Reddy [5] a développé la théorie de layerwise pour l'analyse de la vibration libre des plaques stratifiées. Cette méthode de résolution, la plus courante et la plus sophistiquée, se base essentiellement de divers effets tridimensionnels. D'autre part, Numayr et al. [6] ont utilisé la méthode des différences finies pour montrer que la prise en compte des effets de l'inertie de rotation et de cisaillement transverse affecte les fréquences propres de vibration des plaques minces et épaisses.

Afin de mieux comprendre le comportement vibratoire des plaques composites, nous nous sommes intéressés, dans cet article, à étudier l'influence des conditions d'appuis, des dimensions de la plaque composite, du degré d'anisotropie du matériau, de la séquence d'empilement du stratifié et du nombre des couches sur l'évolution de la fréquence fondamentale.

1. EQUATIONS CONSTITUTIVES DES COMPOSITES STRATIFIES

L'étude du comportement mécanique d'une structure composite doit prendre en considération le caractère anisotrope des propriétés mécaniques du matériau de base, tant sur les plans raideur que résistance. A ce titre, l'application de la mécanique des milieux continus, homogènes et anisotropes permet de définir, en nature et en nombre, les caractéristiques nécessaires et suffisantes pour décrire le comportement du composite quel que soit l'état de charge appliqué. La théorie des plaques stratifiées est différente de celle d'un matériau classique du fait de l'existence de couplage entre les déformations planes ε^0 et les courbures κ .

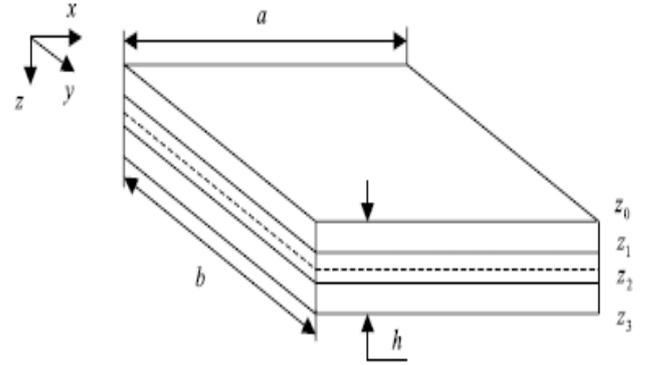


Figure 1 : Géométrie et cotation des plis d'un stratifié

L'équation constitutive d'une plaque stratifiée exprime les efforts de membrane N et les moments M par :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (1)$$

dans laquelle les rigidités en membrane A_{ij} , les coefficients de couplage B_{ij} et les rigidités en flexion D_{ij} d'un stratifié régulier sont obtenues respectivement en fonction des rigidités réduites transformées \bar{Q}_{ij} , du nombre total des plis composants N et de l'épaisseur du stratifié h :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \frac{h}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k, \\ B_{ij} &= \frac{h}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \bar{z}_k, \\ D_{ij} &= \frac{h}{N} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k \left(\bar{z}_k^2 + \frac{h^2}{12 N^2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

\bar{z}_k est la distance qui existe entre la surface moyenne du stratifié et le milieu de la $k^{\text{ème}}$ couche.

Afin d'identifier les fréquences et les modes propres du matériau composite, nous devons établir les équations d'équilibre en absence de cisaillement transversal [7] :

$$\begin{aligned} &A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{16} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\ &+ (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\ &- (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned}
 & A_{16} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + (A_{16} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \\
 & + 2A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = \rho_s \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \quad (3b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x \partial y^3} \\
 & + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{11} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - 3B_{16} \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 u_0}{\partial x \partial y^2} \\
 & - B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} - B_{16} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} - (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^2 \partial y} \\
 & - 3B_{26} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} = q - \rho_s \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (3c)
 \end{aligned}$$

Où $u_0(x, y, 0)$, $v_0(x, y, 0)$ et $w_0(x, y, 0)$ représentent les déplacements du plan moyen géométrique suivant les directions respectives x , y et z .

1.1. Comportement des stratifiés symétriques

Les stratifiés symétriques sont utilisés afin d'éliminer le couplage entre membrane et flexion/torsion. Ils sont composés d'un nombre impair de couches situées de part et d'autre et à la même distance de la surface moyenne. Les stratifiés symétriques sont spécialement orthotropes lorsqu'ils sont caractérisés par des rigidités en flexion D_{16} et D_{26} nulles.

Lorsque la plaque est en appuis simples sur les quatre côtés, les conditions aux frontières s'écrivent [9] :

- Appuis $x = 0, x = a$:

$$w_0 = 0, M_x = -D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (4a)$$

- Appuis $y = 0, y = b$:

$$w_0 = 0, M_y = -D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (4b)$$

Supposons que la vibration de la plaque soit un mode de vibration naturel dont la fréquence est $\frac{\omega}{2\pi}$, la solution de l'équation (3c) pourra être écrite sous la forme [10] :

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i\omega t} \quad (5)$$

Le report de l'expression de w_0 (5) dans l'équation (3c) permet d'avoir la fréquence fondamentale :

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4]} \quad (6)$$

Pour une plaque rectangulaire ($a \times b \times h$) encadrée sur son pourtour, les conditions aux frontières s'écrivent [10] :

$$\text{- Sur les côtes } x = 0, x = a : w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial x} = 0 \quad (7a)$$

$$\text{- Sur les côtes } y = 0, y = b : w_0 = 0, \frac{\partial w_0}{\partial y} = 0 \quad (7b)$$

Satisfaisant les conditions décrites par l'équation (7). De cette façon la flèche s'écrit [11] :

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N (1 - \cos \frac{2\pi m}{a} x) \left(1 - \cos \frac{2\pi n}{b} y\right) e^{i\omega t} \quad (8)$$

En reportant cette dernière expression dans la relation (3c), on obtient la fréquence naturelle de la plaque encadrée :

$$\omega_{11} = \frac{4\pi^2}{3a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [3D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + 3D_{22}R^4]} \quad (9)$$

R représente le rapport longueur/largeur (a/b) de la plaque.

Les stratifiés généralement orthotropes présentent de couplage flexion-torsion (D_{16} et D_{26} ne sont pas nulles). Dans ce cas, on ne peut pas résoudre directement les équations (3a à 3c) mais on cherche des solutions approchées en faisant appel à la méthode de Ritz. La considération du maximum de l'énergie potentielle et de celui de l'énergie cinétique nous permet d'obtenir les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 U_{\max} &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left\{ D_{11} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right]^2 + 2D_{12} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right] \right. \\
 &+ D_{22} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right]^2 + 4D_{16} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] \\
 &+ 4D_{26} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] + 4D_{66} \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]^2 \left. \right\} dy dx \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho h \omega^2 \int_0^a \int_0^b W^2(x, y) dy dx \quad (11)$$

$W(x, y)$ est le déplacement transversal de la plaque recherchée sous la forme de la double série [7] :

$$\sum \sum A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \text{ avec } m = 1, 2 \dots M \text{ et } n = 1, 2 \dots N \quad (12)$$

Les fonctions $X_m(x)$ et $Y_n(y)$ doivent vérifier les conditions aux frontières. Les coefficients A_{mn} sont déterminés par les conditions de stationnarité :

$$\frac{\partial [U_{\max} - T_{\max}]}{\partial A_{mn}} = 0 \quad (13)$$

De cette façon, on peut déterminer respectivement les fréquences fondamentales des stratifiés symétriques généralement orthotropes en appuis simples et encastés :

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4]} \quad (14)$$

$$\omega_{11} = \frac{1}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} [50056 D_{11} + 30271 (D_{12} + 2D_{66})R^2 + 50056 D_{22}]} \quad (15)$$

1.2. Comportement des stratifiés antisymétriques

Certaines applications nécessitent l'utilisation des stratifiés antisymétrique. De tels composites sont constitués d'un nombre pair de couches et sont caractérisés par l'existence du couplage membrane-flexion ($B_{ij} \neq 0$). Dans le cas des stratifiés croisés antisymétriques $[0/90]_n$, les équations de mouvement (3a à 3c) se réduisent à :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (16a)$$

$$A_{11} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + B_{11} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (16b)$$

$$D_{11} \left(\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} \right) + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} - B_{11} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3} \right) - \rho_s \omega^2 w_0 = 0 \quad (16c)$$

Dans le cas où les côtés de la plaque sont en appuis simples, les conditions aux frontières s'écrivent [10] :

- Sur les côtés $x = 0$ et $x = a$:

$$w_0 = 0, M_x = B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

$$v_0 = 0, N_x = A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} - A_{12} \frac{\partial v_0}{\partial y} - B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17a)$$

- Sur les côtés $y = 0$ et $y = b$:

$$w_0 = 0, M_y = -B_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0$$

$$u_0 = 0, N_x = A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{11} \frac{\partial v_0}{\partial y} + B_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} = 0 \quad (17b)$$

Lorsque le stratifié antisymétrique est équilibré $[+\theta/-\theta]_n$, il présente autant de couches orientées suivant l'angle $+\theta$ que de couches à $-\theta$. Dans ce cas, les relations fondamentales s'expriment par :

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{66} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} - 3B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^2 \partial y} - B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial y^3} = 0 \quad (18a)$$

$$A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} - 3B_{26} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x \partial y^2} - B_{16} \frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3} = 0 \quad (18b)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} - B_{16} \left(3 \frac{\partial^3 u_0}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3} \right) - B_{26} \left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial y^3} + 3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial x \partial y^2} \right) - \rho_s \omega^2 w_0 = 0 \quad (18c)$$

Dans le cas où les côtés de la plaque sont en appuis simples, les conditions aux frontières s'écrivent [10] :

- Sur les côtés $x = 0$ et $x = a$:

$$w_0 = 0, M_x = B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) - D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

$$u_0 = 0, N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (19a)$$

- Sur les côtés $y = 0$ et $y = b$:

$$w_0 = 0, M_y = B_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0$$

$$v_0 = 0, N_{xy} = A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - B_{16} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - B_{26} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0 \quad (19b)$$

La détermination des fréquences propres ω , dans le cas des plaques simplement appuyées sur les quatre côtés, est possible par l'utilisation de la méthode de séparation des variables (espace et temps) [7]:

$$\begin{aligned} u_0(x, y, t) &= u_0(x, y) e^{i\omega t} \\ v_0(x, y, t) &= v_0(x, y) e^{i\omega t} \\ w_0(x, y, t) &= w_0(x, y) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (20)$$

En reportant ces dernières expressions dans les relations fondamentales (16) et (18) on obtient respectivement les fréquences fondamentales d'une plaque croisée et équilibrée:

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left[D_{11}(1+R^4) + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 - \frac{B_{11}^2}{\Delta_1} (\Delta_3 + \Delta_2 R^4) \right]} \quad (21)$$

$$\omega_{11} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{1}{\rho_s} \left\{ [D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})R^2 + D_{22}R^4] - \frac{1}{\Delta_1} [(B_{16} + 3B_{26}R^2)\Delta'_2 + R^2(3B_{16} + B_{26}R^2)\Delta'_3] \right\}} \quad (22)$$

Avec :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= (A_{11} + A_{66}R^2)(A_{66} + A_{11}R^2) - (A_{12} + A_{66})^2 R^2 \\ \Delta_2 &= 2(A_{12} + A_{66}) + A_{11}R^2 + A_{66}R^4 \\ \Delta_3 &= A_{66} + A_{11}R^2 + (A_{12} + A_{66})R^4 \end{aligned} \quad (23)$$

et:

$$\begin{aligned} \Delta'_1 &= (A_{11} + A_{66}R^2)(A_{66} + A_{22}R^2) - (A_{12} + A_{66})^2 R^2 \\ \Delta'_2 &= (A_{11} + A_{66}R^2)(B_{16} + 3B_{26}R^2) - (A_{12} + A_{66})(3B_{16} + B_{26}R^2)R^2 \\ \Delta'_3 &= (A_{66} + A_{22}R^2)(3B_{16} + B_{26}R^2) - (A_{12} + A_{66})(B_{16} + 3B_{26}R^2) \end{aligned} \quad (24)$$

L'application de la méthode de Ritz (13) est nécessaire pour l'obtention des fréquences d'oscillation libre des plaques encastées.

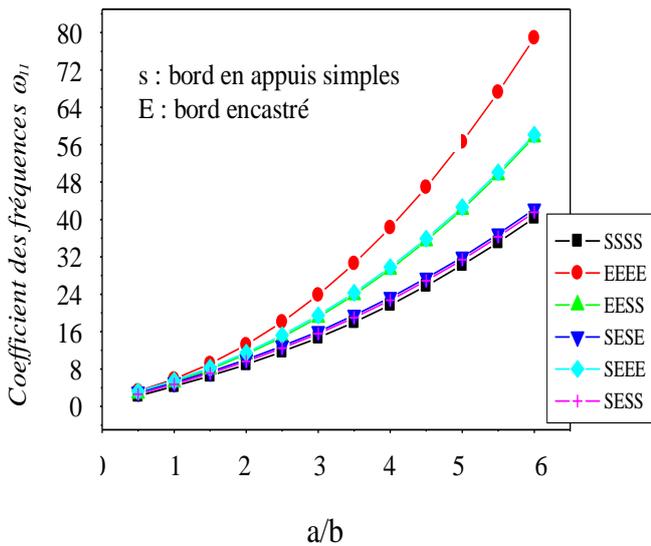


Figure 2 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport a/b de la plaque croisée [0°/90°]_{2s} sous différentes conditions aux frontières

2. RESULTATS ET DISCUSSIONS

Le matériau composite considéré dans cette étude est le Bore/époxyde dont le mode de disposition de son renfort est unidirectionnel. Il est caractérisé par les grandeurs élastiques et rapports d'orthotropie suivants [8]:

$$E_1/E_2=10, G_{12}/E_2=0.5 \text{ et } \nu_{12}=0.3$$

Dans la littérature l'analyse de différents matériaux composites à renforcement unidirectionnel nécessite un rapport d'orthotropie E_1/E_2 variant de 1 à 50 selon le matériau composite utilisé. Les paramètres G_{12}/E_2 et ν_{12} sont fixés vu leur faible influence sur la variation des fréquences propres à comparer avec celle du rapport E_1/E_2 .

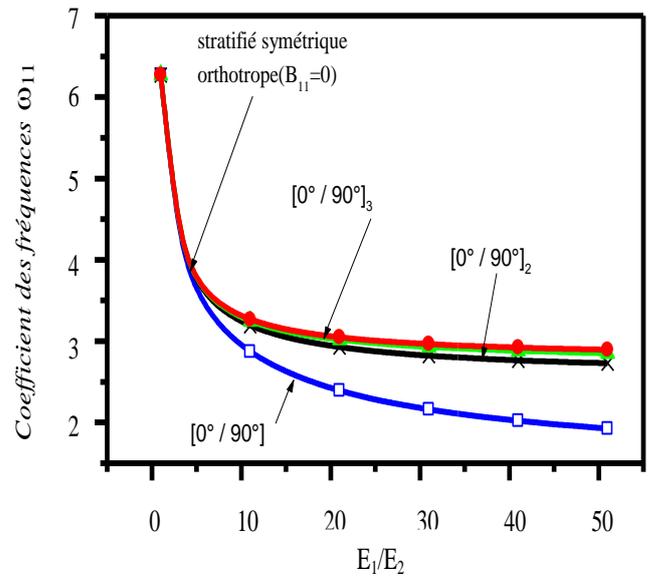


Figure 3 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport E_1/E_2 de la plaque croisée [0°/90°]_{2s} en appuis simple

Afin de mieux comprendre l'influence des paramètres de renforcement et de configuration des plaques composites considérées sur leur comportement vibratoire, on a représenté sur la figure 2 l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction du rapport longueur/largeur R du stratifié croisé antisymétrique [0/90]_{2s} et de celui du stratifié orthotrope avec la variation des conditions aux frontières sur les quatre côtés des plaques. On remarque que lorsque les bords de la plaque sont encastés, elle devient plus rigide entraînant l'augmentation de sa fréquence.

La variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 est représentée sur la figure 3. On a considéré le cas d'un stratifié croisé antisymétrique dont le nombre de couches est égale à 2, 4 et 6 et aussi le cas d'un stratifié croisé symétrique orthotrope.

La variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport d'orthotropie E_1/E_2 est représentée sur la figure 3. On a considéré le cas d'un stratifié croisé antisymétrique dont le nombre de couches est égale à 2, 4 et 6 et aussi le cas d'un stratifié croisé symétrique orthotrope. Les résultats obtenus montrent que le couplage membrane-flexion réduit la valeur de la fréquence fondamentale et qu'elle tend rapidement vers la solution des stratifiés symétriques orthotropes lorsque le nombre de couches augmente et le rapport d'orthotropie E_1/E_2 s'éloigne de la valeur 1. Ce résultat est bien en accord avec celui obtenu par [7] (figure 4).

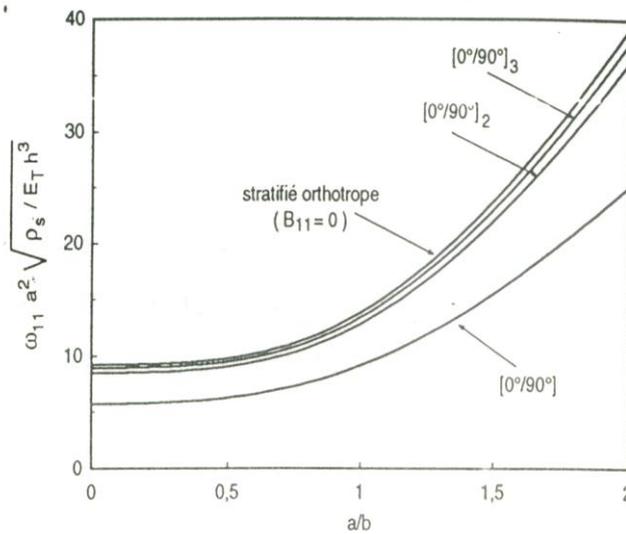


Figure 4 : Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale en fonction du rapport a/b d'une plaque rectangulaire, constituée d'un stratifié croisé [7]

La considération de différents stratifiés équilibrés, à plusieurs géométries et orientations des fibres de bore renforçant la matrice époxyde, permet de montrer respectivement sur les figures 5a et 5b l'évolution de la fréquence fondamentale en fonction de l'angle d'orientation des fibres θ renforçant une plaque carrée ($R=1$) et une rectangulaire de géométrie $a=2b$ ($R=2$). De plus, pour mieux examiner l'effet du couplage membrane-flexion/torsion sur la variation de la fréquence propre, on a considéré des stratifiés équilibrés avec différents nombres de couches

Les résultats obtenus montrent que la fréquence fondamentale dépend de l'angle d'orientation du renfort. Nous constatons alors qu'au fur et à mesure que le nombre de couches composantes augmente, les coefficients de couplage B_{16} et B_{26} deviennent négligeables en entraînant l'accroissement de la valeur de la fréquence fondamentale.

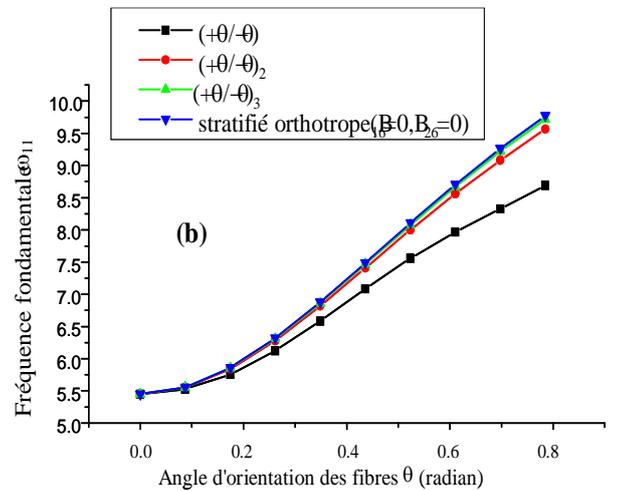
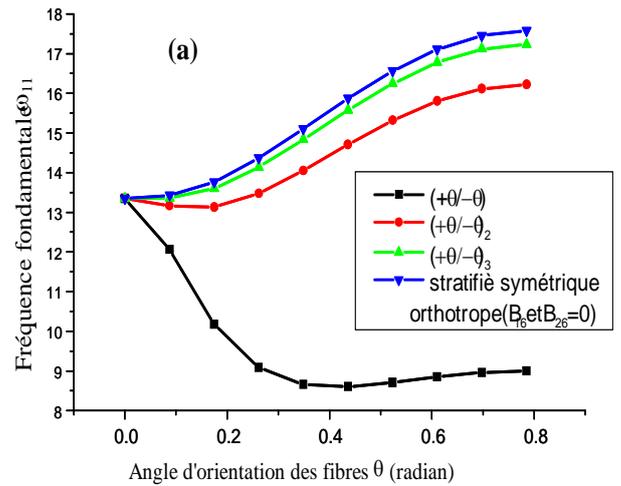


Figure 5 : Variation de la fréquence fondamentale en fonction de l'orientation du renfort des plaques stratifiées équilibrées sous appuis simples de formes (a) carrée, (b) rectangulaire

Dans ce cas, elle tend rapidement vers les solutions des stratifiés symétriques et orthotropes quelque soit la forme géométrique de la plaque composite. Ce résultat est en accord avec celui obtenu par [7] (figure 6).

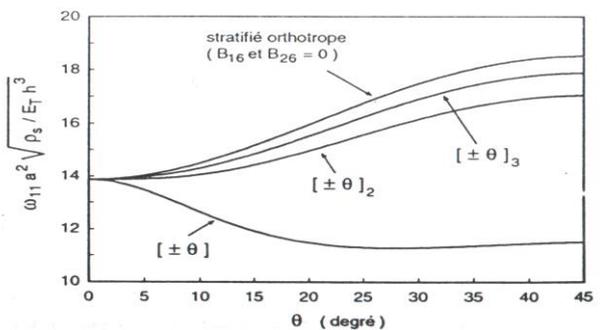


Figure 6 : Comparaison de la variation de la fréquence fondamentale de vibration d'une plaque carrée, constituée d'un stratifié équilibré en fonction de l'orientation θ [7]

CONCLUSION

L'objectif de ce travail était d'analyser le comportement vibratoire de plaques composites stratifiées en bore/époxyde et à différentes séquences d'empilement sous l'effet de certains paramètres géométriques, de renforcement et de conditions aux frontières.

Les résultats obtenus ont montré l'importance du degré d'anisotropie du matériau et de la forme rectangulaire des plaques composites sur la valeur de la fréquence propre. L'influence de la séquence d'empilement sur l'évolution de la fréquence de vibration des stratifiés antisymétrique a été mise en évidence par le développement de la méthode de Ritz à partir des conditions aux frontières imposées.

Il a été ressorti que le couplage membrane-flexion/torsion est responsable de l'accroissement de la fréquence fondamentale jusqu'à atteindre celle des stratifiés symétriques orthotropes lorsque le nombre des couches composantes augmente.

RÉFÉRENCES

- [1] Jones, R.M. 1973. Buckling and vibration of unsymmetrically laminated cross-ply rectangular plates. *AIAA J.* 11, 1616-1632.
- [2] Jones, R.M. 1973. Vibration of antisymmetrically laminated angle-ply rectangular plates. *J. Applied Mech.* 40, 1143-1144.
- [3] Hearmon, R.F.S. 1959. The frequency of flexural vibration of rectangular orthotropic plates with clamped or simply supported edges. *J. Applied Mech.* 26, 537-540
- [4] Bert, C.W. & Birman, V. 1977. Dynamic instability of shear deformable anti-symmetric angle-ply plates. *Int. J. of Solid Structures.* 23, 1053-1061.
- [5] Reddy, J.N. 1984. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J. Applied Mech.* 51, 745-752.
- [6] Numayr, K.S., Haddad, R.H. & Haddad, M.A. 2004. Free vibration of composite plates using the finite difference method. *Thin-walled Struct.* 42, 399-414.
- [7] Berthelot J.M. 1999. Matériaux Composites/Comportement mécanique et analyse des structures. *Technologie & Documents, Paris.* 558 -560.
- [8] Plusquellec J. Vibrations. *Techniques de l'ingénieur (A410).*
- [9] Whitney, James Martin. 1968. A study of effects of coupling between bending and stretching on the mechanical behavior of layered anisotropic composite materials. *.Ph.D , thesis/Ohio State University .*
- [10] Whitney, J.M. & Leissa, A.W. 1969. Analysis of heterogeneous anisotropic plates, *J. Applied Mech.* 36, 261-266.
- [11] Ashton J.E., Whitney J.M. 1970. Theory of Laminated Plates. *Technomic Publishing Co.*