

DETERMINATION AUTO-CONSISTANTE DES FREQUENCES PROPRES DE POUTRES ET DE PLAQUES ORTHOTROPES.

Reçu le 14/05/2005 – Accepté le 19/11/2005

Résumé

La méthode présentée dans ce papier permet de calculer d'une manière auto-consistante les fréquences propres de poutres et plaques orthotropes. Le comportement dynamique de celles-ci est ainsi analysé en utilisant la théorie de la plaque orthotrope simplement appuyée sur les deux côtés et libre sur les deux autres. La détermination de la réponse dynamique des structures considérées nécessite la connaissance au préalable des fréquences libres et des modes propres de vibrations. Notre travail s'inscrit dans ce contexte. La formulation est basée sur la détermination de la solution de l'équation différentielle de vibration. La détermination des solutions non triviales du système d'équations qui en découle conduit à un problème non linéaire en fréquences propres. Nous développons alors un code de calcul pour la détermination de ces dernières où la précision atteint 10^{-12} . Les fréquences propres d'une plaque type sont ainsi analysées. Les résultats ont pu être généralisés au cas d'une poutre en la considérant comme une plaque de faible largeur. Nous donnons, dans ce papier, quelques exemples de cas traités. La comparaison avec des résultats présentés dans la littérature est tout à fait satisfaisante.

Mots clés : Poutre, plaque orthotrope, vibration, fréquences propres, modes, optimisation.

Abstract

The method presented in this paper permits to calculate in a self-consistent way the Eigen frequencies of beams and orthotropic plates. The dynamic behavior of those is thus analyzed by using the theory of the orthotropic plate simply supported on the two sides and free on the two others. The determination of the dynamic response of the structures considered requires knowledge of the free frequencies and the mode shapes. Our work is in this context. The formulation is based on the determination of the solution of the differential vibration equation. The determination of the noncommonplace solutions of the system of equations leads to a nonlinear problem in Eigen frequencies. We then develop a computer code for the determination of these later where the precision reaches 10^{-12} . The Eigen frequencies of a standard plate are thus analyzed. The results could be generalized with the case of a beam by regarding it as a plate with very low width. We give, in this paper, some examples of treated cases. The comparison with results presented in the literature is completely satisfactory.

Keywords: Beam, orthotropic plate, vibration, Eigen frequencies, modes, optimization.

R .LASSOUED¹
M. GUENFOUD²

¹ Laboratoire des matériaux et durabilité des constructions. Département de génie civil. Faculté des sciences de l'ingénieur. Université Mentouri Constantine. Algérie.
² Laboratoire d'hydrologie et génie civil. Université de Guelma. Algérie.

L'étude de vibrations de différentes structures excitées par des charges mobiles, tels que les ponts, les routes, les rails des voies ferrées ..., suscite de plus en plus de travaux de recherche. Le calcul des fréquences, des modes de vibration et des déplacements représente donc un souci majeur pour l'analyse dynamique des structures élastiques. En effet, n'importe quelle étude de poutres, de plaques et donc de ponts sous charges mobiles, doit impérativement commencer par la détermination de ses modes de vibration propres et donc de ses fréquences libres. Ainsi, Wu et Dai [1] ont utilisé la méthode des matrices de transfert pour déterminer les fréquences et les modes libres d'une poutre sur plusieurs appuis. Ils ont appliqué la technique de superposition modale pour étudier les performances de la poutre considérée soumise à des charges mobiles. J.D. Yau and all [2] étudièrent le comportement dynamique d'un pont sous l'effet de charges mobiles en proposant une méthode purement analytique. Plus tard, D.J. Gorman [3] présenta une procédure de détermination de valeurs propres pour une plaque orthotrope complètement libre en utilisant une méthode de superposition.

Il utilisa également [4], cette méthode afin de d'obtenir une solution analytique exacte de vibrations libres de plaques rectangulaires d'épaisseurs uniformes, appuyée sur des supports élastiques uniformément répartis. Dans tous ces travaux et afin de prédire le comportement dynamique des structures étudiées, les auteurs commencent, au préalable, par déterminer les fréquences propres de celles-ci. Pour finir, nous mentionnons les travaux de Leissa [5,6] qui représentent une excellente référence concernant le problème de vibrations des plaques. Nous y trouvons en particulier, l'équation caractéristique de plaques minces ayant deux côtés opposés simplement appuyés et les deux autres libres. Par contre, l'étude des plaques épaisses est mentionnée, surtout, sur les travaux de Lim and all [7]. Dans ce papier, le comportement dynamique des plaques considérées est analysé en utilisant la théorie des plaques orthotropes.

FORMALISME CONSIDERE

La figure 1 représente une plaque rectangulaire simplement appuyée sur deux côtés opposés et libres des deux autres côtés.

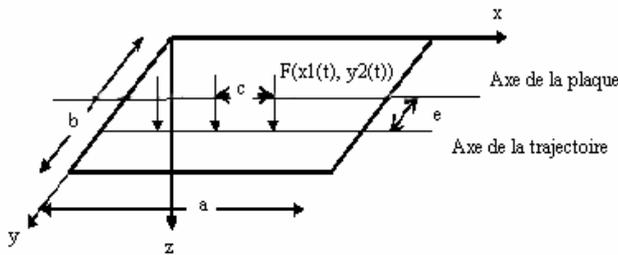


Figure1 : Modèle de la plaque sollicitée par un convoi de charges mobiles.

Si elle est sollicitée par une force extérieure F, L'équation différentielle partielle du mouvement de cette plaque orthotrope s'écrit en accord avec la théorie de Huffington et Hoppman [8] comme suit :

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + C \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(x, y, t) \quad (01)$$

$$\text{où : } D_x = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}, \quad D_y = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})},$$

$$D_{xy} = (D_{xy} + 2D_k), \quad D_k = \frac{G_{xy} h^3}{12}, \quad (02)$$

Notons que les effets secondaires (cisaillement et inertie rotationnelle) sont négligés. La résolution de l'équation différentielle régissant le mouvement est obtenue en utilisant la superposition modale et l'intégration de convolution en considérant une séparation des variables spatiales et temporelles. Ainsi, la réponse dynamique au point (x,y) de la plaque et à l'instant t est exprimée sous forme de séries selon l'expression suivante [10]:

$$W(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{m,n}(x, y) \cdot q_{m,n}(t) \quad (03)$$

$$\text{Où : } U_{m,n}(x, y) = Y_{m,n}(y) \cdot \sin(\theta_m \cdot x) \quad q_{m,n}(t) = \sin(\omega_{m,n} \cdot t)$$

et $\theta_m = m \cdot \pi / a$; $\omega_{m,n}$ est la fréquence libre qui correspond au m^{ième} mode dans la direction x et le n^{ième} mode dans la direction y .

En introduisant l'équation (03) dans l'équation (01), nous obtenons:

$$D_y \cdot Y_{mn}^{(4)}(y) - 2D_{xy} (\theta_m)^2 \cdot Y_{mn}^{(2)}(y) + [D_x \cdot \theta_m^4 - \rho h \omega_{mn}^2] Y_{mn}(y) = 0 \quad (04)$$

De plus, nous prenons en compte les conditions aux limites sur les bords de la structure en y=0 et y=b. Celles-ci stipulent que l'effort tranchant, le moment fléchissant ainsi que le moment de torsion sont nuls à ces extrémités. Nous pouvons alors écrire le système d'équations (05) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} + \nu_{xy} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta y^2} = 0, \quad -D_{xy} \cdot \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta y} - D_y \cdot \frac{\delta^3 w}{\delta y^3} = 0 \\ \left\{ \begin{aligned} 2D_k \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta y} = 0, \quad -D_{xy} \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta y} - D_y \cdot \frac{\delta^3 w}{\delta y^3} - 2D_k \frac{\delta^3 w}{\delta x^2 \delta y} = 0 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad (05)$$

Les solutions de l'équation (04) dépendent des propriétés de la plaque considérée. Ainsi, nous pouvons obtenir les trois cas suivants selon la valeur du coefficient de rigidité de la plaque :

1-

$$Y_{mn}(y) = X_{1mn} \cdot \sin(r_{2mn} y) + X_{2mn} \cdot \cos(r_{2mn} y) + X_{3mn} \cdot \sinh(r_{1mn} y) + X_{4mn} \cdot \cosh(r_{1mn} y) \quad (06)$$

$$\text{si } [D_x < D_1] \quad \text{Où} \quad D_1 = \rho \cdot h \cdot \omega_{mn}^2 \cdot \theta_m^{-4}$$

2-

$$Y_{mn}(y) = X_{1mn} \cdot \sinh(r_{1mn} y) + X_{2mn} \cdot \cosh(r_{1mn} y) + X_{3mn} \cdot \sinh(r_{3mn} y) + X_{4mn} \cdot \cosh(r_{3mn} y) \quad (07)$$

$$\text{si } [D_{xy}^2 / D_y + D_1 > D_x > D_1]$$

3-

$$Y_{mn}(y) = \cosh(r_{4mn} y) \cdot (X_{1mn} \cdot \cos(r_{5mn} y) + X_{2mn} \cdot \sin(r_{5mn} y)) + \sinh(r_{4mn} y) \cdot (X_{3mn} \cdot \cos(r_{5mn} y) + X_{4mn} \cdot \sin(r_{5mn} y))$$

$$\text{si } [D_x > D_{xy}^2 / D_y + D_1] \quad (08)$$

Les paramètres r_{imn} dépendent des propriétés physiques de la plaque considérée et des modes de vibrations retenus [9].

$$\begin{aligned}
 r_{1mn} &= \theta_m \sqrt{\frac{D_{xy} + \sqrt{D_{xy}^2 + D_y \cdot D_1 - D_x \cdot D_y}}{D_y}}; & r_{2mn} &= \theta_m \sqrt{\frac{-D_{xy} + \sqrt{D_{xy}^2 + D_y \cdot D_1 - D_x \cdot D_y}}{D_y}} \\
 r_{3mn} &= \theta_m \sqrt{\frac{D_{xy} - \sqrt{D_{xy}^2 + D_y \cdot D_1 - D_x \cdot D_y}}{D_y}}; & r_{4mn} &= \theta_m \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{D_{xy}}{D_y} + \sqrt{\frac{D_x}{D_y} - \frac{D_1}{D_y}} \right)}; \\
 r_{5mn} &= \theta_m \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\frac{D_{xy}}{D_y} + \sqrt{\frac{D_x}{D_y} - \frac{D_1}{D_y}} \right)}
 \end{aligned} \quad (09)$$

En introduisant la forme des modes propres dans les quatre conditions aux limites et en considérant les différents cas de figure, nous obtenons trois systèmes linéaires homogènes de la forme : $[\mathbf{M}] \cdot [\mathbf{X}] = \mathbf{0}$.

\mathbf{X} est un vecteur tel que : $[\mathbf{X}] = [X_{1mn} \ X_{2mn} \ X_{3mn} \ X_{4mn}]^T$ et \mathbf{M} est une matrice dont les coefficients m_{ij} dépendent des conditions aux limites. Ainsi, dans chacun des trois cas définis précédemment selon le coefficient de rigidité, nous remplaçons la valeur de $Y_{mn}(y)$ par la forme appropriée (06, 07 ou 08) dans les équations (05). Nous obtenons alors la valeur de la matrice \mathbf{M} dans les trois cas considérés [11] :

1-Cas où $[D_x < D_1]$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & -r_2^2 - \nu_{xy} \cdot \theta^2 & 0 & r_1^2 - \nu_{xy} \cdot \theta^2 \\ m_{12} \cdot \sin(r_2 \cdot b) & m_{12} \cdot \cos(r_2 \cdot b) & m_{14} \cdot sh(r_1 \cdot b) & m_{14} \cdot ch(r_1 \cdot b) \\ D_{xy} \cdot r_2 \cdot \theta^2 + D_y \cdot r_2^3 + 2 \cdot D_k \cdot \theta^2 \cdot r_2 & 0 & D_{xy} \cdot \theta^2 \cdot r_1 - D_y \cdot r_1^3 + 2 \cdot D_k \cdot r_1 \cdot \theta^2 & 0 \\ m_{31} \cdot \cos(r_2 \cdot b) & -m_{31} \cdot \sin(r_2 \cdot b) & m_{33} \cdot ch(r_1 \cdot b) & m_{33} \cdot sh(r_1 \cdot b) \end{bmatrix}$$

2- cas où $\left[\frac{D_{xy}^2}{D_y} + D_1 > D_x > D_1 \right]$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & r_1^2 - \nu_{xy} \cdot \theta^2 & 0 & r_3^2 - \nu_{xy} \cdot \theta^2 \\ m_{12} \cdot sh(r_1 \cdot b) & m_{12} \cdot ch(r_2 \cdot b) & m_{14} \cdot sh(r_3 \cdot b) & m_{14} \cdot ch(r_3 \cdot b) \\ -D_y \cdot r_1^3 + (D_{xy} + 2 \cdot D_k) \cdot \theta^2 \cdot r_1 & 0 & -D_y \cdot r_3^3 + (D_{xy} + 2 \cdot D_k) \cdot r_3 \cdot \theta^2 & 0 \\ m_{31} \cdot ch(r_1 \cdot b) & m_{31} \cdot sh(r_1 \cdot b) & m_{33} \cdot ch(r_3 \cdot b) & m_{33} \cdot sh(r_3 \cdot b) \end{bmatrix}$$

3- Cas où $\left[D_x > D_{xy}^2 / D_y + D_1 \right]$

$$M = \begin{bmatrix} r_4^2 - r_5^2 - \nu_{xy} \cdot \theta^2 & 0 & 0 & 2 \cdot r_4 \cdot r_5 \\ m_{11} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) - 2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) & m_{11} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) + 2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) & m_{11} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) - 2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) & m_{11} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) + 2 \cdot r_4 \cdot r_5 \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) \\ 0 & (D_{xy} + 2 \cdot D_k) \cdot \theta^2 \cdot r_5 - 3 \cdot D_y \cdot r_4^2 \cdot r_5 + D_y \cdot r_5^3 & -D_y \cdot r_4^3 + 3 \cdot D_y \cdot r_4 \cdot r_5^2 + (D_{xy} \cdot \theta^2 + 2 \cdot D_k \cdot \theta^2) \cdot r_4 & 0 \\ m_{33} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) - m_{32} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) & m_{33} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) + m_{32} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) & m_{33} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) - m_{32} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) & m_{33} \cdot ch(r_4 \cdot b) \cdot \sin(r_5 \cdot b) + m_{32} \cdot sh(r_4 \cdot b) \cdot \cos(r_5 \cdot b) \end{bmatrix}$$

Pour obtenir des solutions non triviales, il est nécessaire que le déterminant du système soit nul. L'écriture de ce déterminant permet d'aboutir à l'équation aux fréquences. Sachant que les paramètres r_{imm} ne sont pas des variables indépendantes mais sont reliés à la pulsation ω par les équations (09), la résolution de l'équation aux fréquences n'est pas aisée et nécessite alors un traitement informatique adéquat.

Nous cherchons à déterminer les pulsations ω vérifiant cette équation. Pour cela, nous développons un code qui calcule les valeurs propres de l'équation aux fréquences. Il est basé sur une méthode de bisection avec interpolation dont la précision atteint 10^{-12} . Cette méthode permet d'enregistrer les valeurs propres des fréquences correspondant aux différents modes de vibration. Pour chaque indice m , on trouve une infinité dénombrable de solutions $m=1, \dots, \infty$ (figure 2).

Chaque solution est alors repérée par un double indice ω_{rs} . Un zoom de la figure 2 montre les valeurs des fréquences propres déterminées par dichotomie. Les paramètres r_{imm} sont ensuite évalués pour chaque fréquence, permettant ainsi de calculer la matrice M . Pour déterminer, ensuite, le vecteur X , solution du système homogène $[M] \cdot [X] = 0$, l'algorithme de calcul que nous avons mis au point (fig. 3) utilise la méthode itérative de Gauss avec une optimisation partielle des pivots combinée avec une procédure de puissance inverse. La précision pour ce calcul est de l'ordre de $1e-5$. L'utilisation de cette procédure permet d'avoir les modes fondamentaux qui correspondent aux fréquences les plus basses. Cette méthode [12] revêt beaucoup plus d'importance que les méthodes classiques car elle permet d'avoir les valeurs propres les plus petites correspondant aux modes de vibration les plus bas ; ceux ci sont décisifs quant à la stabilité de la structure.

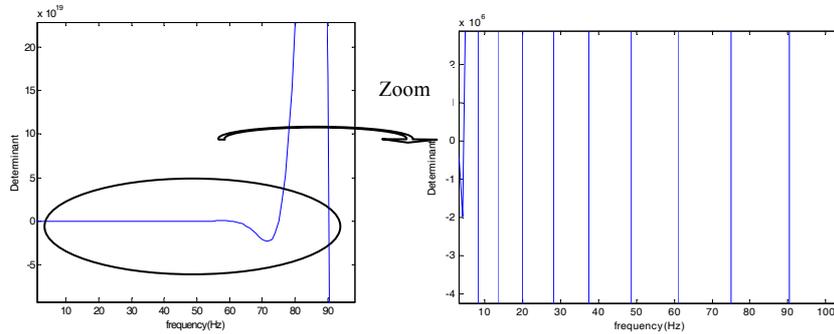


Figure 2 : Evaluation des fréquences libres

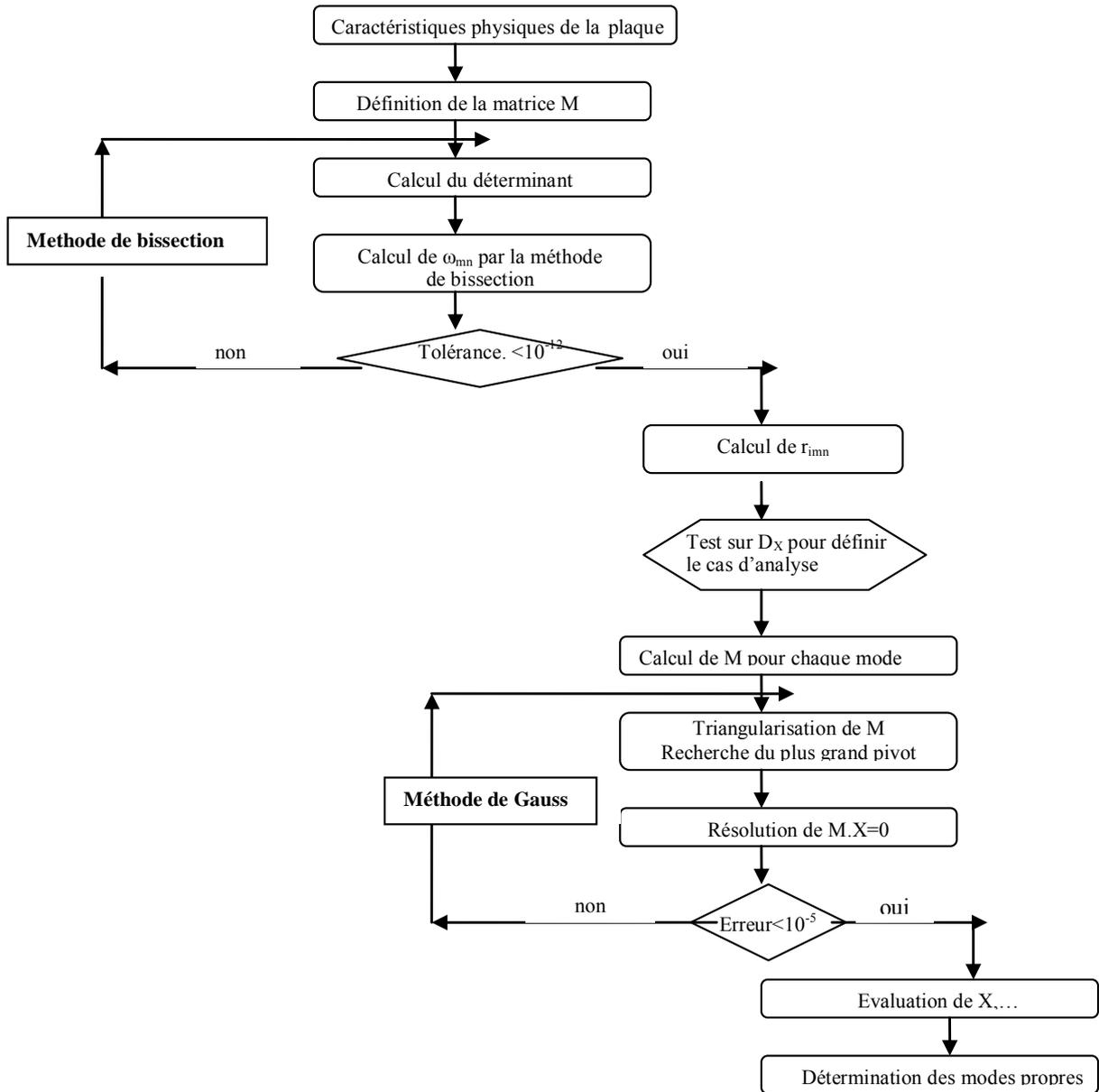


Figure 3 : Algorithme de résolution.

RESULTATS ET DISCUSSIONS

Nous considérons dans cette étude, une structure de 3.678 m de longueur, de 0.025 m de hauteur et de largeur variable. Le module de Young du matériau considéré est de $2.1 \times 10^9 \text{N/m}^2$. La densité de masse est de 2300Kg/m^3 et le coefficient de Poisson est de 0.3.

La figure 4 représente les fréquences libres de la plaque considérée relative à deux largeurs différentes de celle-ci. Ces fréquences correspondent aux modes propres relatifs à la direction y uniquement. Les résultats obtenus sont comparés à ceux présentés dans la référence [9]. Pour une simplicité de représentation, nous n'illustrons sur la figure que les fréquences correspondant aux modes de flexion. La comparaison est tout à fait satisfaisante.

En effet, nous calculons sur le tableau 1 les coefficients de corrélation représentant le rapport entre les valeurs données sur la référence 9 et nos propres valeurs. De plus l'algorithme que nous avons développé peut être facilement appliqué au cas d'une poutre, en la considérant comme une plaque de très faible largeur. Nous pouvons observer l'influence de la largeur de la plaque sur les fréquences libres, paramétrée par le mode considéré sur la figure 5. Pour un mode donné (figure 6), celle-ci présente une croissance monotone en allant du cas de poutre vers celui de la plaque.

Nous présentons, à titre d'exemple, les principaux modes de vibrations obtenus dans le cas d'une poutre (figure 7a-b-c) et dans celui d'une plaque (figure 7e-f-d). Le mode (1,1) est celui correspondant à la plus faible pulsation.

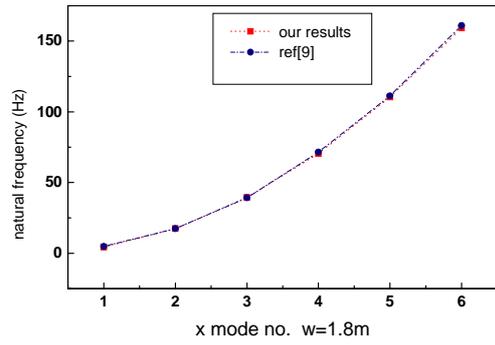
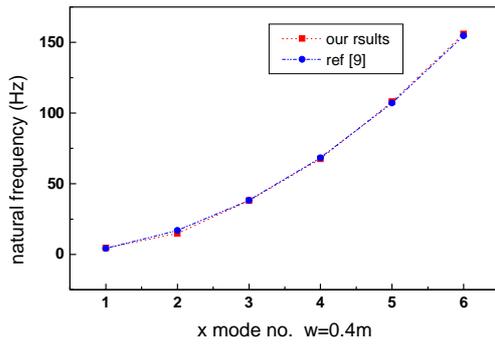


Figure4 : Evolution des fréquences libres avec le mode considéré.

Tableau 1 : Coefficient de corrélation de fréquences.

N° mode	1	2	3	4	5	6
Coef. Corrélation. b=0.4m	0.9250	1.1440	1.0061	1.0094	0.9910	0.9930
Coef. Corrélation. b=1.8m	1.1210	1.0000	0.9940	1.0150	1.0091	1.011

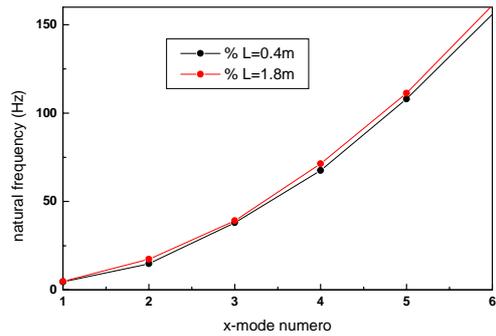


Figure 5 : Evolution des fréquences libres paramétrées par la largeur de la plaque.

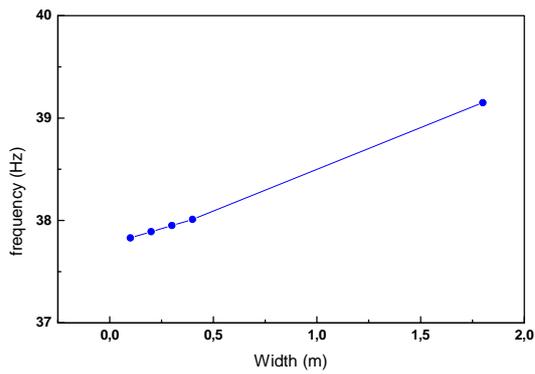
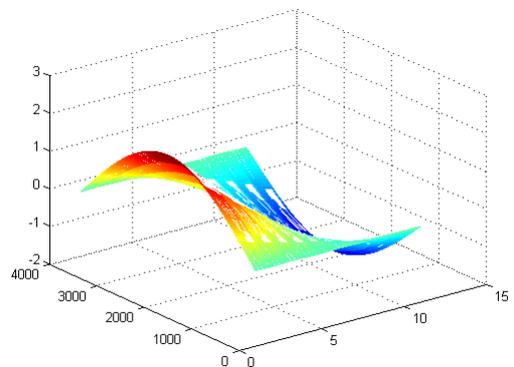
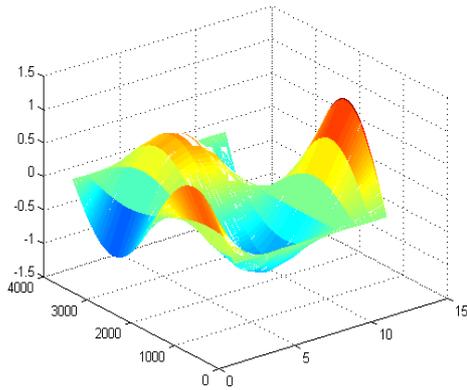


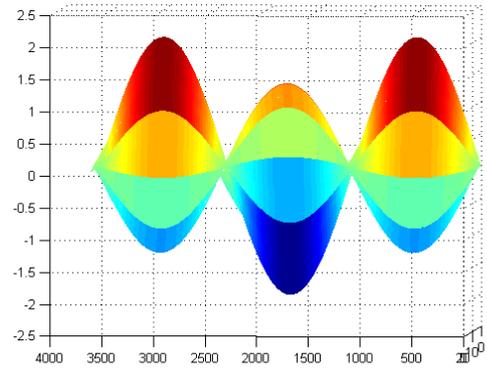
Figure 6 : Evolution des fréquences libres pour le troisième mode.



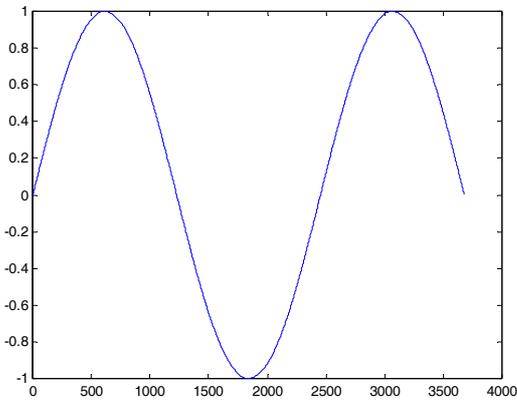
7-a) mode (1,1) ; b=0.1m



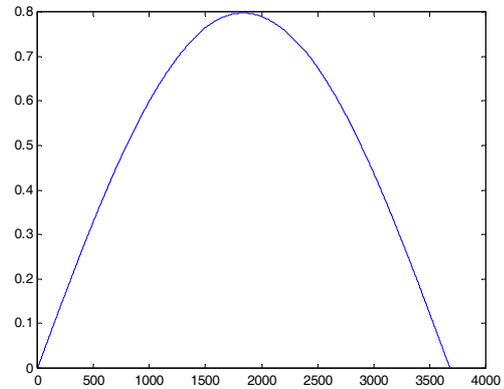
7-b) mode (2,1) ; $b=0.1\text{m}$



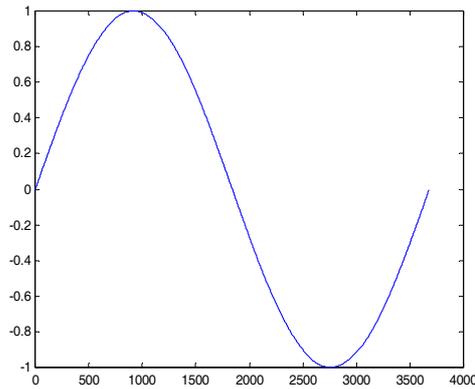
7-c) mode (3,1) ; $b=0.1\text{m}$



7-d) mode (3,1) ; $b=1.8\text{m}$



7-e) mode (1,1) ; $b=1.8\text{m}$



7-f) mode (2,1) ; $b=1.8\text{m}$

Figure 7 a-b-c : modes propres : cas d'une poutre de 0.1m de largeur.

d-e-f : modes propres : cas d'une plaque de 1.8m de largeur.

CONCLUSION

Nous avons présenté dans ce papier, un programme de calcul auto-consistant qui détermine les fréquences libres de poutres et de plaques orthotropes. Les fréquences obtenues suivent une loi de croissance monotone avec le numéro de mode considéré. Le mouvement vibratoire général de la structure considérée est la somme de tous les mouvements modaux. Les résultats que nous présentons ont été comparés avec ceux présents dans la littérature spécialisée et cette comparaison est tout à fait satisfaisante. Le calcul par la suite de l'intégrale de Duhamel, afin de déterminer la composante du déplacement variant avec le temps, permettra à l'avenir de déterminer le déplacement global de la structure. Une application de ce travail serait alors l'étude d'un convoi de forces mobiles traversant un pont qui sera considéré comme une plaque que nous venons de présenter.

Liste des symboles :

a : longueur de la plaque.

b : largeur de la plaque.

h : hauteur de la plaque.

I : moment d'inertie.

ρ : Masse volumique du matériau.

E : Module d'élasticité de la plaque.

$W(x, y, t)$: Flèche transversale.

D_X, D_Y, D_{XY} : rigidité en flexion de la plaque dans les directions x, y et xy .

D_K : Rigidité de torsion de la plaque.

G_{XY} : Module de cisaillement.

m : masse.

e : excentrement des forces mobiles.

c : distance entre deux forces mobiles.

$\omega_{m, n}$: fréquence libre.

ν : Coefficient de Poisson.

$U_{m, n}(x, y)$: mode propre.

REFERENCES

- [1]- J.S. Wu, C.W. Dai "Dynamic responses of multi-span non uniform beam due to moving loads" J. Struct. Eng. (1987) 113; 458-74.
- [2]- J.D. Yau, Y.S. Wu, Y.B. Yang : "Impact response of bridge with elastic bearings to moving loads" Journal of sound and vibrations (2001) 248 (1), 9-30.
- [3]- D.J. Gorman: "Highly accurate free vibration eigenvalues for the completely free orthotropic plate" Journal of sound and vibrations 280 (2005) 1095-1115.
- [4]- D.J. Gorman: "free in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastic support normal to the boundaries." Journal of sound and vibrations, article in press, available online at www.sciencedirect.com.
- [5]- A.W. Leissa, "Vibrations of plates", NASA SP-160.
- [6]- A.W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", Journal of sound and vibrations 31 (1973) 257-293.
- [7]- C.W. Lim and all "Numerical aspects for free vibration of thick plates. Part I : Formulation and verification". Computer methods in Applied Mechanics and Engineering, 156 (1998a) 15-29.
- [8]- N.J. Huffington and W.H. Hoppmann, "On the transverse vibrations of rectangular orthotropic plates", Journal of Applied Mechanics ASME 25, (1958), 389-395.
- [9]- X.Q. Zhu and S.S. Law, "Identification of vehicle axle loads from bridge dynamic responses" Journal of Sound and Vibration, 236, (4), (2000), 705-724.
- [10]- F.T.K. Au and M.F. Wang, "Sound radiation from forced vibration of rectangular orthotropic plates under moving loads", Journal of Sound and Vibration, 281, (2005), 1057-1075.
- [11]- J.L. Guyader, « Vibrations des milieux continus », Collection d'acoustique, Lavoisier 2002, ISBN 2-7462-0546-7.
- [12]- F. Jędrzejewski, « Introduction aux méthodes numériques » Springer 2001, ISBN 2-287-49711-5.