

# L'INFLUENCE DE LA POSITION ET DE L'ANGLE DE PROPAGATION DE LA FISSURE AUTOUR DES PLAQUES MINCE EN ALUMINIUM ET SOUS L'EFFET DE TRACTION.

Sofiane CHORFI et Brahim NECIB

Département de Génie mécanique, Laboratoire de mécanique, Université des Frères Mentouri Constantine, Algérie.

Reçu le 11 Janvier 2017 – Accepté le 14 Décembre 2019

## Résumé

Ce travail est une contribution à l'analyse du comportement des fissures émergeant des trous dans les plaques minces sous l'effet des efforts de traction. L'analyse est réalisée sous le code de calcul ANSYS avec le langage de conception paramétrique (APDL). Deux facteurs principaux ont été considérés : la position de l'amorçage de la fissure et l'angle de propagation de la fissure. La position d'amorçage du trou est définie par un point sur le pourtour du trou et l'angle d'inclinaison par rapport à l'axe orthonormé (X,Y) dont l'origine est le centre du trou. Deux positions ont été choisies : initiation sur l'axe des abscisses X, correspondant à l'angle  $0^\circ$  et initiation à  $45^\circ$ . Pour chacune des positions, la propagation de la fissure est simulée dans 4 directions :  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ , et  $90^\circ$ . la stratégie de calcul a été mise en œuvre se basant sur la méthode des éléments finis "de point quart spécial" et impliquant l'approche BEM et XFEM. Les résultats ont permis de définir le mode de fissuration (MODE I, II ou III) et de calculer les valeurs des facteurs d'intensités de contraintes correspondant à chaque mode. Les résultats numériques sont confrontés aux résultats analytiques.

**Mots clés :** *Plaque trouée, contrainte, modes de fissuration, facteurs d'intensité, longueur de fissure, angle de propagation, efforts de traction.*

## Abstract

This work is a contribution to the analysis of the behavior of cracks emerging from holes in thin plates under the effect of tensile forces. The analysis is carried out under the ANSYS code with the parametric design language (APDL). Two main factors were considered: The position of crack initiation and crack propagation angle. The hole priming position is defined by a point on the edge of the hole and the angle of inclination with respect to the orthonormal axis (X, Y) whose center is the center of the hole. Two positions were chosen: initiation on the abscissa axis X, corresponding to the angle  $0^\circ$  and initiation at  $45^\circ$ . For each of the positions, the propagation of the crack is simulated in 4 directions,  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ , and  $90^\circ$ . A calculation strategy was implemented based on the "special quarter-point" finite element method and involving the BEM and XFEM approach. The results made it possible to define the cracking mode (MODE I, II or III) and to calculate the values of the stress intensity factors corresponding to each mode. The numerical results are confronted with the analytical results.

**Key words:** *Plate perforated, forced, modes of cracking, factors of intensity, length of crack, angle of propagation, tensile forces.*

## المخلص

هذا العمل هو مساهمة في تحليل سلوك الشقوق الناشئة عن ثقوب في لوحات رقيقة تحت تأثير قوى الشد. يتم تنفيذ التحليل تحت رمز ANSYS مع لغة تصميم (parametric APDL). تم أخذ عاملين رئيسيين في الاعتبار: موقف بدء الكراك وزاوية انتشار الكراك. يتم تحديد موضع فتحة الحفرة بنقطة على محيط الثقب وزاوية الميل فيما يتعلق بالمحور (orthonormal X Y)، الذي يكون مركزه هو مركز الثقب. تم اختيار وظيفتين: البدء على المحور (abscissa X)، المقابل للزاوية  $0^\circ$  والبدء عند  $45^\circ$  درجة. لكل من المواقف، يتم محاكاة انتشار التشقق في 4 اتجاهات،  $0^\circ$ ،  $30^\circ$ ،  $60^\circ$ ، و  $90^\circ$  درجة. تم تطبيق إستراتيجية حسابية على أساس طريقة العناصر المحددة "نقطة ربع خاصة" وتتضمن أسلوب BEM و XFEM. جعلت النتائج من الممكن تحديد وضع التشقق (MODE I, II, III) ولحساب قيم عوامل شدة الإجهاد المقابلة لكل نمط. النتائج العددية تواجه النتائج التحليلية.

**الكلمات المفتاحية:** *لوحه مثقبة، والضغط، وتكسير وسائط، والعوامل شدة، طول صدع، زاوية نشر، قوى الشد.*

## 1. INTRODUCTION

Les plaques trouées ont beaucoup d'applications concrètes surtout en mécanique (structures assemblées, par boulons ou par rivés par exemples), en aéronautique, en biomécanique,...etc. De nos jours, l'étude du phénomène de traction sur ces plaques montre un affaiblissement qui se produit en raison de la présence des contraintes locales ou concentrations de contraintes au niveau de ces trous. Il est donc conseillé d'éviter, autant que possible, le perçage qui augmente la probabilité de la présence des fissures [1-2]. Cependant, lorsque la présence de ces facteurs est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contraintes associé à chaque géométrie afin de dimensionner ces structures, d'éviter leur désastre et d'augmenter leur durée de vie; chose qui a été considérée dans notre problème.

Durant la dernière décennie, la problématique de la propagation des fissures dans les plaques trouées minces constitue un axe important de recherche et d'engineering afin d'éviter la destruction et la fissuration totale des structures mécaniques, aéronautiques et de génie civil. Sih et Lee ont étudié le comportement théorique des plaques fissurées sous des charges extérieures, la longueur des fissures sous l'effet de la charge critique puis ils ont montré les formes des modes liés à ces plaques [3]. Shaw, Huang et Riks ont étudié le comportement des plaques fissurées sous la force de traction par la méthode des éléments finis et ont examiné l'effet de la longueur de la fissure [4-5]. Ils ont prouvé la validité de leurs relations par la méthode des éléments finis. Brighenti a employé la méthode numérique et également la méthode analytique pour étudier le phénomène de la propagation des fissures dans les plaques trouées sous les charges extérieures [6-8]. Il a étudié l'effet des variables mécaniques et géométriques telles que le coefficient de Poisson, les conditions de frontière, la longueur de fissure, et l'angle d'amorçage. Les résultats ont indiqué que chacun de ces paramètres a un effet considérable sur la charge de flambage. Shariati et autres ont numériquement étudié la direction de propagation des fissures sous le chargement axial de compression en matériaux élasto-plastiques en considérant quelques paramètres, tels que la longueur, l'angle de fissure et les conditions aux frontières, l'imperfection et les caractéristiques des différents matériaux des plaques [9].

D'autre part, Griffith a développé que la présence de ces défauts dans un matériau pouvait amplifier la contrainte locale. Cette dernière peut atteindre une valeur égale à la résistance en traction sans que la contrainte extérieure appliquée soit élevée. Ce principe peut aussi s'appliquer à toutes les discontinuités géométriques présentes dans un matériau comme une fissure interne ou externe [10]. En général, la direction macroscopique de propagation d'une fissure est généralement perpendiculaire à la contrainte qui contribue à l'ouverture de la fissure. Cette configuration est appelée mode d'ouverture (mode I). Deux autres modes de propagation existent, le mode de cisaillement plan (mode II) et le mode de cisail-

lement anti-plan (mode III)[11]. L'approche, basée sur la mécanique linéaire de la rupture, est à trois variables; la contrainte appliquée, la ténacité  $K_c$  qui remplace la limite d'élasticité qui est la taille du défaut. Il y a cependant deux approches alternatives de la mécanique de la rupture, l'une utilise le concept d'intensité des contraintes critiques (ténacité du matériau) et l'autre, le critère d'énergie. Ces deux approches sont équivalentes dans certaines conditions [12]. Un certain nombre de critères de rupture ont été développés par beaucoup de chercheurs, parmi lesquels, on peut citer : le critère des contraintes circonférentielles maximales, proposé par Erdogan et Sih [13], le critère de facteur de densité d'énergie de tension présenté par Sih [14,15] et le critère d'ouverture du point de fissure développé par Sutton et Al. [16].

Notre travail est une contribution à l'analyse de la propagation d'une fissure au voisinage d'un trou, dans une plaque mince en aluminium, sous sollicitations externes en traction. Deux points de départ de fissure sur la périphérie du trou ont été considérés; sur l'axe horizontal du trou ( $0^\circ$ ) et à  $45^\circ$ . L'objectif est d'étudier l'influence de la variation de l'angle de propagation pour chacun des points de départ de la fissure. L'étude est réalisée numériquement en utilisant les méthodes "BEM" et "XFEM" sous le code APDL de calcul "ANSYS" [17]. Les résultats numériques obtenus sont confrontés aux résultats tirés de l'approche analytique.

## 2. MODELE MATHEMATIQUE APPLIQUÉ

### 2.1. Évaluation du facteur d'intensité de contrainte

Dans notre cas, une plaque mince isotrope, percée d'un trou circulaire, a été considérée afin de déterminer les contraintes et les déformations autour de ce trou. Ces derniers peuvent être obtenus à partir du facteur de concentration de contraintes  $K_t$  [18] donné par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_N} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_N} \quad (1)$$

Où  $\sigma_{\max}$  et  $\varepsilon_{\max}$  sont respectivement les contraintes et les déformations maximales locales; tandis que  $\sigma_N$  et  $\varepsilon_N$  sont les contraintes et les déformations nominales. Dans le cas de la singularité des contraintes, le calcul du facteur d'intensité de contraintes "FIC" est également compliqué parce qu'il est une fonction de la position le long du front de fissure, de la taille de fissure, de sa forme, de son type de chargement et de la géométrie de sa structure. Dans cette étude, les éléments finis spéciaux dits le quart-point, proposés par Barsoum [19], sont des éléments singuliers qui représentent des déplacements et des tractions. Ils sont employés pour obtenir une meilleure approximation du champ autour du point du front de fissure (Fig.1), où le nœud latéral de l'élément est relié au point du front déplacé à 1/4 de la longueur de cet élément.

Des solutions du "FIC" peuvent être calculées en utilisant la technique d'extrapolation cinématique du dépla-

cements [20]; cela implique une corrélation entre les déplacements des éléments de frontière sur la surface de la fissure "Boundary Element Method" et celles des valeurs théoriques de la formule d'Irwin. Les résultats du "FIC" sont calculés à deux endroits éloignés du bout de la fissure. La technique d'extrapolation est illustrée par le schéma, présenté à la Fig. 1.

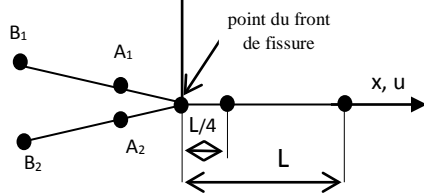


Fig.1: Description de la technique d'extrapolation [24]

$$K_I = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4(V_{A_1} - V_{A_2}) - \frac{(v_{B_1} - v_{B_2})}{2} \right] \dots\dots\dots(2)$$

$$K_{II} = \frac{E_{tip}}{3(1+\nu_{tip})(1+k_{tip})} \sqrt{\frac{2\pi}{L}} \left[ 4(U_{A_1} - U_{A_2}) - \frac{(U_{B_1} - U_{B_2})}{2} \right] \dots\dots\dots(3)$$

Ou :

$E_{tip}$  et  $\nu_{tip}$ ; sont respectivement le module de Young et le Coef. de Poisson dans le point du front de fissure ;  
 $u_n, v_n$  ( $n=A_1, A_2, B_1, B_2$ ) sont les déplacements nodaux dans les nœuds  $A_1, A_2, B_1, B_2$ , respectivement suivant les directions respectives  $x, y$ .

$L$  : la longueur du coté singulier de l'élément.

$$\text{For plane stress} \dots\dots k_{tip} = \frac{(3 - \nu_{tip})}{(1 + \nu_{tip})} \dots\dots\dots(4)$$

$$\text{For plane deformation} \dots\dots k_{tip} = \frac{(3 - \nu_{tip})}{(1 + \nu_{tip})} \dots\dots\dots(5)$$

Les facteurs d'intensité des contraintes  $K_I$  et  $K_{II}$ , selon Richard [21], ont trouvé des solutions pour une fissure centrale, plane et normale aux faces latérales. Les facteurs d'intensité de contraintes, pour différents angles d'orientation de fissuration initiale, s'appuient sur la méthode de XFEM et sont donnés par les expressions suivantes [22] :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{\cos \alpha}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)} \sqrt{\frac{0,26 + 2,65 \left(\frac{a}{W-a}\right)}{1 + 0,55 \left(\frac{a}{W-a}\right) + 0,08 \left(\frac{a}{W-a}\right)^2}} \dots\dots\dots(6)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \frac{\sin \alpha}{\left(1 - \frac{a}{W}\right)} \sqrt{\frac{-0,23 + 1,4 \left(\frac{a}{W-a}\right)}{1 + 0,67 \left(\frac{a}{W-a}\right) + 2,08 \left(\frac{a}{W-a}\right)^2}} \dots\dots\dots(7)$$

### 3. Stratégie de la modélisation de la fissure :

Le code APDL a été utilisé pour la mise en évidence du programme de simulation de la propagation des fissures en faisant l'incrément  $i+1$  de la position, soit le pas, soit l'angle de propagation de la fissure de la plaque trouée (Fig.2) d'où l'intérêt du raffinement de maillage afin d'obtenir des résultats proches de la réalité. Ainsi, on peut introduire les formules de calcul du facteur d'intensité des contraintes de la fissure dans chaque orientation ou position de la plaque trouée. La figure 2 illustre l'or-

ganigramme du code préparé d'APDL, basé sur la combinaison des deux approches BEM et XFEM.

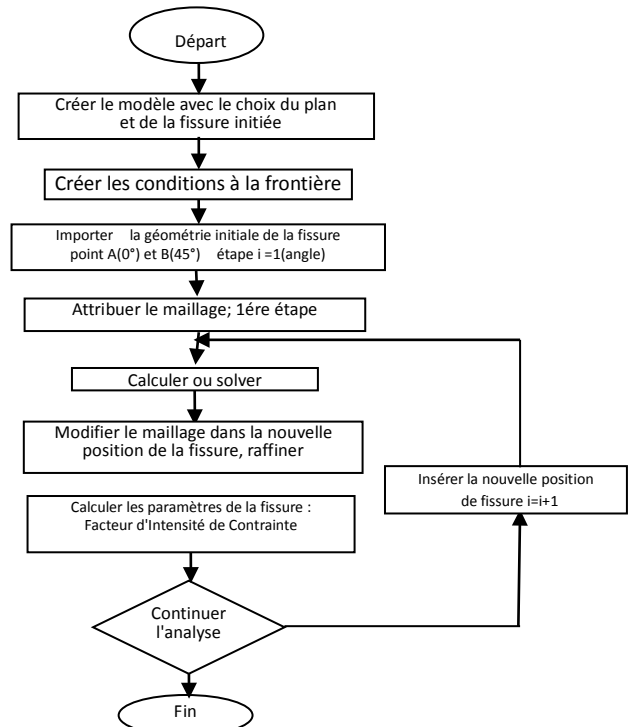


Fig. 2 : Organigramme de simulation de la propagation des fissures dans les plaques trouées

## 4. Analyse numérique de l'amorçage de fissure

### 4.1. Géométrie de la plaque

On considère une plaque mince trouée en aluminium 7075-T6, d'épaisseur 3mm, de largeur 35mm et de longueur 100 mm; et un trou de diamètre 10 mm. L'étude est menée sur le quart de la plaque pour économiser le temps d'exécution du travail (voir Fig. 3).

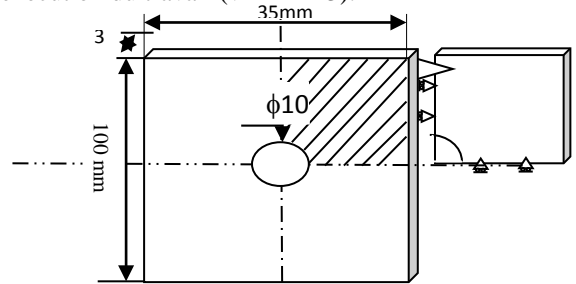


Fig. 3: Géométrie de la plaque.

Les calculs sont effectués en fonction des propriétés du matériau "aluminium 7075-T6", dont les caractéristiques sont énumérées dans le tableau 1:

Tab. 1. Caractéristiques du Matériau

Module de Young "E"	Coef. de Poisson "ν"	Limite de Traction	Masse Volumique	Limite d'Elasticité
7,19999 *10 <sup>9</sup>	0,3	5,7*10 <sup>8</sup> N/m <sup>2</sup>	2810 Kg/m <sup>3</sup>	5,07* 10 <sup>8</sup> N/m <sup>2</sup>

L'origine des coordonnées globales X, Y est prise dans le centre du trou. Sous l'effet de la traction, les extrémités de la plaque se déplacent seulement le long des axes perpendiculaires. Des méthodes numériques sont utilisées

pour déterminer la contrainte dans le patch horizontal maximal de la plaque. Les résultats calculés sont comparés à la valeur maximale déterminée, quant à elle, en utilisant les valeurs tabulées [23-24] (voir la Fig. 8).

**4.2. Effet du Maillage sur la contrainte maximale appliquée à la plaque**

Un maillage raffiné, bien construit, se compose d'éléments quadrangulaires près de la pointe de la fissure pour bien visualiser la propagation de cette dernière. D'après la géométrie de la plaque, le facteur de concentration des contraintes théoriques est  $K_t = 2,17$  [25]. Si l'on considère la surface de la partie transversale  $St = 0,002 \text{ mm}^2$ , et la pression d'excitation  $P = 1 \text{ Pa}$ , la contrainte maximale est alors  $\sigma_{\max} = 4.34 \text{ Pa}$  [25]. Par ailleurs, les valeurs de la contrainte maximale sont calculées numériquement en utilisant deux types de maillages. Le premier moins raffiné (Fig.4a) a donné une valeur de 4,59 Pa, avec une erreur de 5,8%; le deuxième, plus raffiné (Fig. 4b), une valeur de 4,38 Pa, avec une erreur de 1%. En conclusion, plus le maillage est raffiné, plus les résultats de la contrainte maximale convergent vers les valeurs exactes.

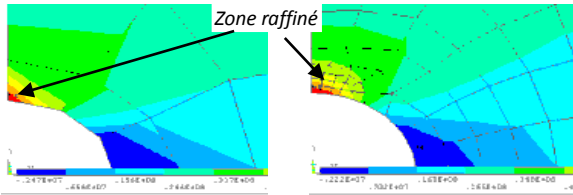


Fig.4 : Contrainte  $\sigma_{\max}$  pour différents maillages (a) Maillage normal . (b) Maillage raffiné

**4.3. Effet de la position de l'amorçage de fissure du trou :**

**4.3.1. Fissure initiée à 0°, 45°**

Dans ce cas, on suppose que la charge de traction est appliquée suivant l'axe y et que la fissure est initiée dans les points A, B au bord du trou, à un angle de 0°, 45° respectivement par rapport à l'origine global X, Y (Fig. 5), puis on analyse la variation des contraintes et le facteur d'intensité des contraintes suivant la longueur des fissures et les différents angles d'orientations.

*a. Variation de la longueur de fissure :*

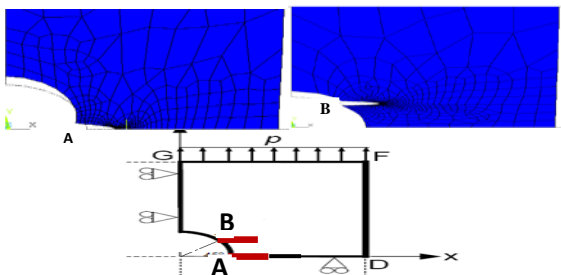


Fig.5 : Le Quart de plaque chargé compris une fissure A, B

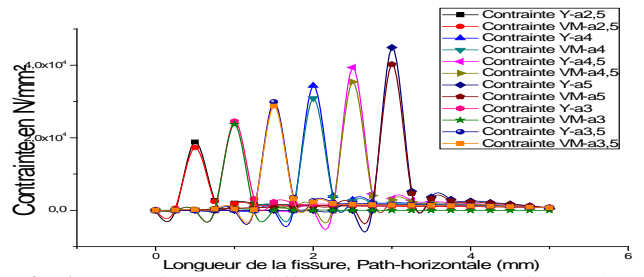


Fig.6: Contraintes des différentes longueurs de fissure le long du patch horizontal pour un angle de 0° (point A)

*b. Variation de l'angle de propagation de fissure*

Dans ce cas, plusieurs orientations de fissuration (0°, 30°, 60°, 90°) sont considérées aux points A, B (Fig. 9).

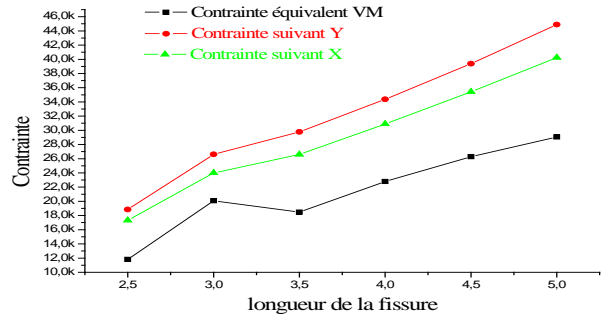


Fig. 7 : Variation des contraintes en fonction de la longueur de la fissure, à angle de 0° (point A)

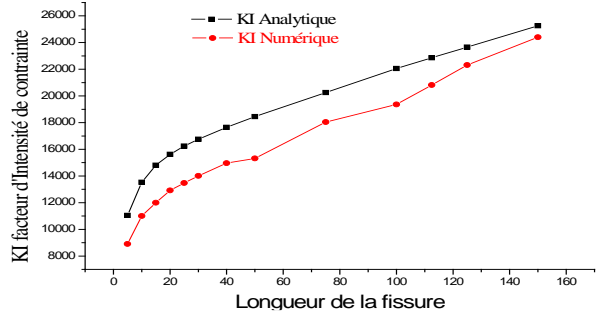


Fig 8 : Variation du facteur d'intensité de contraintes en fonction de la longueur de fissure à angle de 0° (point A)

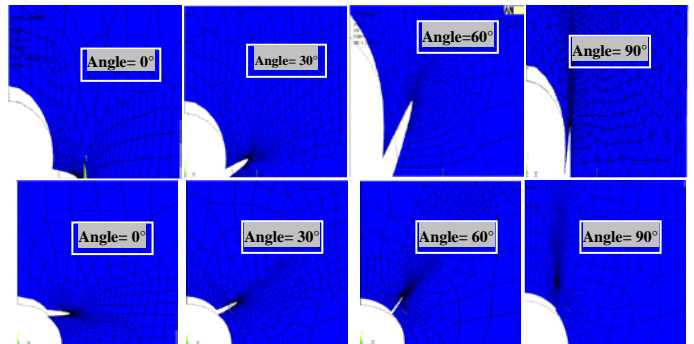


Fig. 9: Variation de l'angle d'amorçage pour les deux fissures A, B sous code ANSYS, APDL

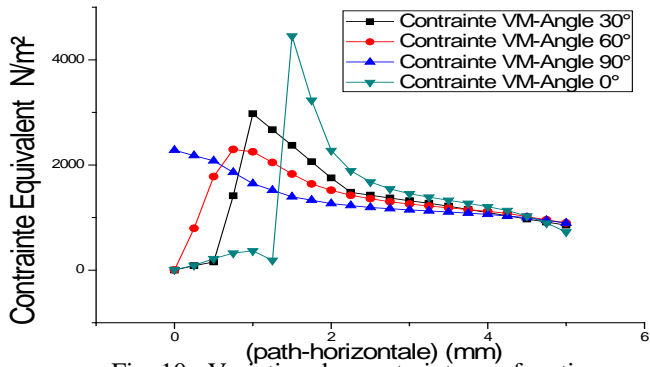


Fig. 10 : Variation des contraintes en fonction de l'angle de propagation (points A)

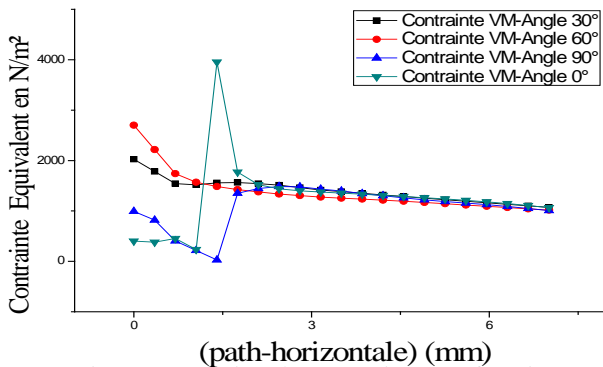


Fig. 11 : Variation des contraintes en fonction de l'angle de propagation (point B)

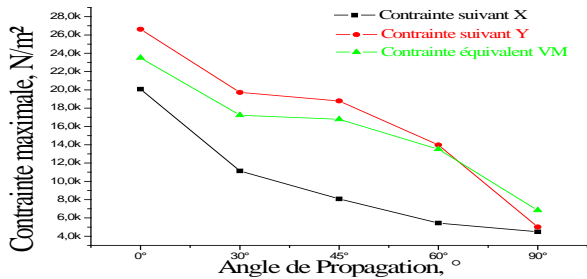


Fig. 12 : Variation des contraintes en fonction d'angle de propagation pour la fissure à 0° (point A)

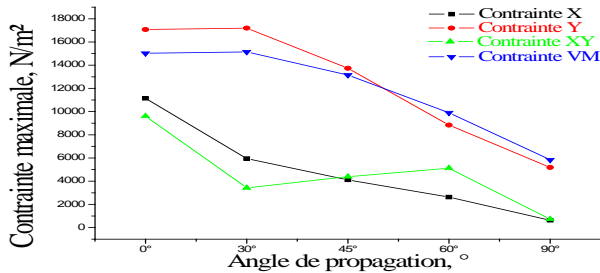


Fig. 13 : Variation des contraintes en fonction d'angle de propagation pour la fissure à 45° (point B)

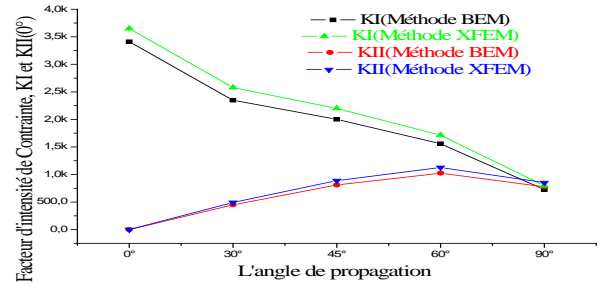


Fig. 14 : Variation du facteur d'intensité de contraintes en fonction de l'angle de propagation de fissure à 0°.

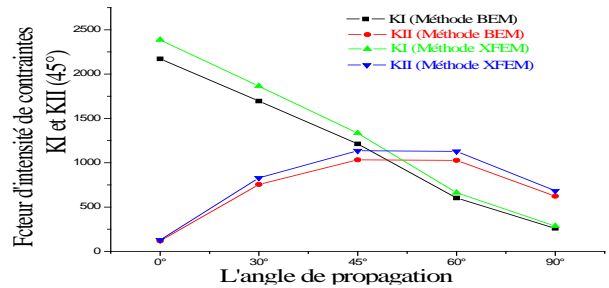


Fig. 15 : Variation de facteur d'intensité de contraintes en fonction d'angle de propagation de fissure à 45°.

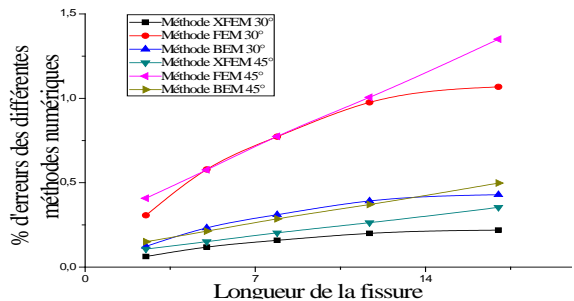


Fig. 16 : Erreurs des différentes méthodes numériques en fonction de la longueur de la fissure et les angles 30°, 45°

## 5. DISCUSSIONS DES RESULTATS

La transformation des coordonnées globales cartésiennes (OXY) en coordonnées locales pour le suivi du point de fissure et de la direction de la propagation de cette fissure aident à trouver les contraintes et les facteurs d'intensité des contraintes dans chaque pas et orientation de fissuration. Il existe plusieurs points d'amorçage de fissure au bord du trou de la plaque. Dans cette étude, on a considéré deux points émergents du trou, la position du premier point d'amorçage de la fissure à 0° (point A), et le deuxième point à 45° (point B).

D'après la Fig. 6 et la Fig.7, on a remarqué une augmentation des contraintes en fonction de la longueur de la fissure, alors qu'il y a une diminution des contraintes en fonction de l'angle de propagation (Fig. 10, 11, 12 et 13). Le facteur d'intensité de contraintes K augmente en fonction de la longueur de fissure pour les deux approches analytique et numérique. L'étude du FIC, caractérisant la fissure, a été réalisée suivant deux méthodes numériques XFEM et BEM, représentées dans les tableaux 2 et 3.

**Tab. 2** Le facteur d'intensité de contraintes d'après la méthode BEM

Position de l'amorçage	Angle de propagation de la fissure					
	0°	30°	45°	60°	90°	
0°	KI	3409.8	2347.8	2001.6	1558.8	725.47
	KII	0	449.26	808.97	1025.5	775.97
45°	KI	2171.6	1695.9	1212.6	602.53	259.26
	KII	117.21	754.54	1033.1	1027.5	622.54

**Tab. 3.**Le facteur d'intensité de contraintes d'après la méthode XFEM

Position de l'amorçage	Angle de propagation de la fissure					
	0°	30°	45°	60°	90°	
0°	KI	3676.2	2580.0	2199.6	1712.9	797.22
	KII	0	493.69	888.98	1126.9	852.72
45°	KI	2386.3	1863.7	1332.6	662.13	284.90
	KII	128.80	829.16	1135.3	1129.1	684.11

Selon la Fig. 14, une fissure initiée à 0°, le facteur d'intensité de contraintes  $K_I$  prend la valeur maximale dans la direction de propagation de 0° puis il diminue progressivement jusqu'à atteindre la valeur minimale à l'angle 90° pour les deux approches, alors que le FIC  $K_{II}$  prend la valeur nulle à 0°, puis il augmente pour s'approcher de la valeur minimale de  $K_I$  à l'angle 90°. Une fissure initiée à 45° (Fig. 15), engendre deux modes de rupture (mode I et mode II), appelés aussi mode mixte. En variant l'angle de propagation, le FIC  $K_I$  à l'angle 0° est de valeur maximale, puis il diminue progressivement jusqu'à l'angle 90°, alors que le FIC  $K_{II}$  à 0° est de valeur minimale non nul; il augmente, par la suite, jusqu'à son intersection avec le mode I à l'angle 45°, il continue son augmentation jusqu'à l'angle 90° et  $K_{II}$  devient supérieur à  $K_I$ . L'évolution des pourcentages d'erreurs des solutions numériques étudiées (Fig. 16) est calculée par rapport à une solution modèle exacte [26]. On observe une augmentation d'erreurs en fonction de la longueur de la fissure et un pourcentage d'erreurs considérable pour la méthode des éléments finis par rapport aux méthodes XFEM et BEM.

## CONCLUSION

La propagation d'une fissure est possible dans les trous des plaques, en présence d'une concentration de contraintes affaiblissant la structure. Cette concentration tend vers un amorçage de fissure qu'on ne peut prédire et une difficulté de le modéliser. Il est donc nécessaire de créer l'amorçage de la fissure manuellement. En effet, l'étude numérique menée sur l'influence de la position, de l'angle d'amorçage autour du trou de la plaque mince en aluminium et sur le comportement sous l'effet d'une charge de traction simple, en considérant l'élément quart-point singulier de traction, sur chaque côté de la fissure, a permis de déduire :

- Il faut bien choisir l'élément quart de point et le raffinement du maillage pour une meilleure convergence vers la solution exacte.

- Il existe une proportionnalité entre la propagation de la fissure et le facteur d'intensité de contraintes.
- Il est impératif de connaître le point de départ de la fissure et son angle de propagation qui est responsable du changement du mode (mode pur ou mixte).
- Les méthodes XFEM et BEM, suivant une singularité d'approximation, ont montré des niveaux d'erreurs faibles par rapport à ceux des méthodes classiques utilisant les éléments finis, qui ont montré des niveaux d'erreurs plus élevés. La première XFEM permet de faire un calcul de propagation avec un maillage unique, alors que la deuxième BEM nécessite une discrétisation à la frontière de l'objet.

## REFERENCES:

- [1]. B. Jouret, F. Congourdeau, Prédiction de la fissuration par fatigue des alésages de jonctions rivetés, In : Colloque National MECAMAT, Aussois, 2003.
- [2]. N. E. Frost, C. E. Phillips, Studies in the formation and propagation of cracks in fatigue specimens, In : International Conference on Fatigue of Metals, London, 1956, pp. 520-526.
- [3]. Sih GC and Lee YD. , "Tensile and compressive buckling of plates weakened by cracks", Vol. 6, N°2, pp. 129-138, (1986).
- [4]. Shaw D. and Y. H. Huang, "Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension", *E.Fracture Mechanics*, Vol. 35, No. 6, pp. 1019- 1027, (1990).
- [5]. Riks E., Rankin CC. and Bargon FA., "Buckling behavior of a central crack in a plate under tension", *Fracture Mechanics*, Vol.43, N4, pp.529-548, (1992).
- [6]. R. Brighenti, "Numerical buckling analysis of compressed or tensioned cracked thin plates", *Engineering Structure*, Vol. 27, No. 2, pp. 265-276, (2005).
- [7]. R. Brighenti, "Buckling of cracked thin plates under tension or compression", *Thin-Walled Structure*, Vol. 43, No. 2, pp. 209-224, (2005).
- [8]. R. Brighenti, "Buckling sensitivity analysis of cracked thin plates under membrane tension or compression loading", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 239, No. 6, pp. 965-980, (2009).
- [9]. M. Shariati and A.M. Majd Sabeti, "Numerical Buckling and post-buckling of cracked plates under axial compression load", *Journal of computational and applied Research in Mechanical Engineering*, Vol. 4, No. 1, pp. 43-54, (2014).
- [10]. J.M. DORLOT, J.-P. BAILON, et J. MASOUNAVE, "Des matériaux" Editions de l'école Polytechnique de Montréal (1986), 467 p.
- [11]. H. PROUDHON " Identification des Mécanismes de Fissuration dans un Alliage d'aluminium Sollicité en Fretting et en Fatigue" Thèse de Doctorat, Génie de matériaux de Lyon 2005.
- [12]. ANDERSON, T.L. (1991) *Fracture mechanics: fundamentals and applications*, CRC press, Boca Raton, 793 p.
- [13]. Erdogan F, Sih GC. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering* 85 (1963)519-27.
- [14]. Sih GC. A special theory of crack propagation.



- Leyden: Noordhoff International Publishing; Mechanics of fracture 1 (1973).
- [15]. Sih GC. Strain energy-density factor applied to mixed mode crack problem. *International Journal of fracture* 10, 3 (1974) 305-21.
- [16]. M. A. Sutton, X. Deng, F. Ma F, Jr JC Newman, M. James. Development and application of a crack tip opening displacement- Based mixed mode fracture criterion. *International Journal of solids and structures* 37 (2000) 3591-618.
- [17]. ANSYS, Inc. Programmer's Manual for Mechanical APDL, Release 12.1 2009.
- [18]. A.BAUS, H.P. LIEURADE, G.SANG et M. TRUCHON, Etude de l'amorçage des fissures de fatigue sur des éprouvettes en acier a très haute résistance, et de dimensions différentes, revue de métallurgie; 565-584, octobre 1977.
- [19]. R. S. Barsoum. On the use of isoparametric finite element in linear fracture mechanics, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 10 (1974) 25-37
- [20]. Ryoji Yuuki and Sang-bong Cho, efficient boundary element analysis of stress intensity factors for interface cracks in dissimilar materials, *Engin. Fract. Mechcs.* 1989, Vol. 34, No. I, pp. 179-188.
- [21]. Richard HA. Bruchvorhersagen normal-und schubbeanspruchung von risen VDI Forschungsheft631. Dusseldorf: VDI-Verlag; 1985. p. 1-60.
- [22]. L.P. Borrego, F.V. Antunes. "Mixed-mode fatigue crack growth behavior in aluminum alloy", *International Journal of Fatigue* 28(2006) 618-626.
- [23]. Lawrence, K.L. (2006), ansys Tutorial, Release7.0. Schroff Development Corporation Publications.
- [24]. Anderson, T.L. (2005), *Fracture Mechanics and Applications*, 3rd Ed.: CRC press, Taylor & Francis Group, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, Boca Raton, FL 33487-2742.
- [25]. Roland, W.L., Perumal, N., and Kankanhalli, N.S. (2004), *Fundamentals of the FEM for Heat and Fluid Flow*: John Wiley & Sons Ltd, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8Q, England.
- [26]. M. K. Kassir and G. C. Sih, Three-dimensional stresses around elliptical cracks in transversely isotropic solids, *Engin. Fract. Mechcs.* 1968, Vol.1, pp. 327-345.