

## EFFET DU CONDITIONNEMENT DES TRANSMISSIVITES SUR LES CARACTERISTIQUES SPECTRALES DE LA MATRICE DE L'ÉCOULEMENT EN MILIEU POREUX

Reçu le 08/03/2003 – Accepté le 07/05/2005

### Résumé

La discrétisation de l'opérateur de l'équation de l'écoulement en milieu poreux naturel donne lieu à une matrice des coefficients dont les éléments reproduisent la variabilité spatiale du champ des transmissivités. Sur le plan numérique, cette expression de l'hétérogénéité a des incidences précises sur le problème aux valeurs propres.

A partir d'une détermination *a priori* des valeurs des caractéristiques spectrales, leurs comportements respectifs sont appréhendés dans des situations où le modèle géostatistique des hétérogénéités module la variabilité spatiale des paramètres. Des simulations conditionnelles, effectuées avec des valeurs autocorrélées des logarithmes des transmissivités, montrent que le rayon spectral et le conditionnement de la matrice de l'écoulement ne sont sensibles au conditionnement statistique du champ des transmissivités que si la distance entre les points de mesure est supérieure à la longueur de corrélation. L'influence de l'écart-type est alors d'autant plus grande que ce nombre de points est élevé.

**Mots clés:** modèles numériques - conditionnement - rayon spectral - hydrogéologie

### Abstract

Usually to determine a measure of the degree of ill-conditioning of an algebraic system, we invoke a condition number for the coefficients matrix. In groundwater modeling these coefficients are depending on the parameters of the heterogeneous porous medium i.e. transmissivities  $T$ . Therefore an estimate of the condition number of the flow matrix is of a considerable interest to assess the accuracy and the reliability of the solution relevant to the numerical method. Ill-conditioning of the system may ascribe to many well-known sources. Herein we inspect condition numbers of flow matrices arising in groundwater modeling flow through synthetic porous media slowly variable. The flow matrices are built up via the numerical generation of conditional log  $T$  fields whose variability is indexed on the corresponding variograms. Numerical experiments of Monte Carlo type allowed to study multiple replications of the flow matrices incorporating available information into estimating the log  $T$  values. Results obtained confirm what it was roughly suspected: condition number and spectral radius of the flow matrix are sensitive to the constraints of the local information only if the distance between these points is greater than the correlation length. In such case, the number of the measurement points increases the influence of the standard deviation  $\sigma_Y$ . Otherwise, the *a priori* information is unvaluable i.e. redundant.

**Keywords:** groundwater modeling - condition number - ill-conditioning

**BENALI A.**

Laboratoire Eau et Environnement,  
Université d'Oran  
BP 16 Es Sénia,  
Algérie.

### ملخص

L'hétérogénéité des milieux poreux est la source cardinale de l'incertitude observée lors de la simulation numérique des modèles de nappes. Son corollaire est la variabilité spatiale des paramètres des écoulements souterrains. Ses effets sur l'évaluation de la charge hydraulique ont été amplement commentés dans la littérature. On trouvera dans [1] une excellente revue exhaustive de cette influence dont on retiendra, ici, la génération de travaux inspectant la stochasticité de l'écoulement via le corps des méthodes de la géostatistique [2,3] ainsi que ceux invoquant l'analyse structurale [4] pour établir le lien entre les variances simples et croisées [5,6,7] tel qu'il est exprimé par l'équation de l'écoulement. En cela, ces méthodes remédiaient au fait que, jusque là, les simulations ne restituaient pas nécessairement les valeurs des charges observées. Dès lors, les simulations furent en mesure de reproduire les aspects statistiques du champ des transmissivités et d'appréhender les aspects déterministes de sa relation avec les charges hydrauliques. Ainsi, la perception quasi intuitive de la connexion entre l'incertitude, la variabilité spatiale et les données *a priori* s'en trouva mieux explicitée ouvrant la voie à la définition d'une véritable stratégie de modélisation des écoulements souterrains [8,9].

De ces travaux, nous retiendrons que les implications numériques de la variabilité spatiale des paramètres ont été très peu traitées dans le contexte des modèles de nappes, quoiqu'elles aient été relevées et soulignées [10]. Cet aspect de la question a néanmoins été pris en charge très tôt par les numériciens aussi bien pour contenir la propagation des erreurs d'arrondis consécutives à l'arithmétique finie des ordinateurs que pour éprouver la stabilité des algorithmes [11, 12, 13]. De ces travaux, on peut relever que l'imprécision des données peut être source d'instabilité spectrale [14, 15] particulièrement dans le cas de matrices d'opérateurs différentiels mal conditionnés. Cette instabilité spectrale s'évalue par la mesure du conditionnement du système [11] ainsi que par sa régularité [14]. Ces deux grandeurs rendent compte aussi bien de sa sensibilité aux erreurs et incertitudes que des performances numériques des méthodes de résolution. L'extension de leur définition [16] et leur importance croissante dans le calcul scientifique sont maintenant largement établies [17, 18, 19].

Dans le contexte des modèles de nappes, ces questions trouvent, là aussi, un large champ d'application puisque les systèmes d'équations algébriques, qui y sont obtenus par discrétisation de l'équation de l'écoulement, posent le problème de leur sensibilité aux données des paramètres et des conditions aux limites. Des éléments de réponse à cette question ont été examinés en [20] pour étayer la nécessité d'aménager la méthode aux éléments finis alors qu'en [21] les conditions de sa fiabilité ont été explorées.

Dans un travail antérieur [22], la robustesse de la matrice de l'écoulement associée à la méthode aux différences finies a été explorée à l'aide d'expérimentations numériques de type Monte Carlo envisageant différentes distributions des transmissivités  $T$  paramétrées sur l'écart-type  $\sigma_{\log T}$  et la longueur de corrélation  $\ell_{\log T}$ . Les données ainsi simulées présentaient la variabilité spatiale postulée pour la loi de conciliation de  $\log T$  et se reflétaient dans ses réalisations. Les résultats obtenus établissaient que plus le niveau d'hétérogénéité était contrôlé, plus l'écart-type du rayon spectral ainsi que le rapport des valeurs propres extrêmes de la matrice de l'écoulement étaient limités.

On se propose de traiter la même question en prenant en compte l'information disponible sur le facteur d'hétérogénéité de  $T$ , acquises par des mesures localisées consécutives à des essais de pompage ou déduites des corrélations entre les débits spécifiques  $S$  et les transmissivités [23]. Pour cela, on a imposé à la loi de conciliation de restituer localement les valeurs de  $T$  selon le principe des simulations conditionnelles [24]. La sensibilité du conditionnement du système aux données de  $T$  est donc posée dans le cadre d'une situation de réduction d'incertitude.

## POSITION DU PROBLEME

Dans les modèles de nappes, le régime permanent est inspecté à partir de simulations numériques entreprises avec l'équation matricielle :

$$\mathbf{B}(T) \mathbf{H} = \mathbf{Q} \quad (1)$$

résultant de la discrétisation de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = Q \quad (2)$$

décrivant le régime stationnaire de l'écoulement bi-dimensionnel dans un milieu poreux [25] affectée de conditions aux limites appropriées. Dans l'équation (1),  $\mathbf{B}(T)$  est la matrice de l'écoulement dont les éléments sont les transmissivités de passage entre les blocs contigus ;  $\mathbf{H}$  est la matrice colonne des charges rapportées aux nœuds et  $\mathbf{Q}$  la matrice colonne qui condense les données sur les entrées-sorties du système.

La transmissivité  $T$  est le paramètre par lequel s'exprime l'hétérogénéité du milieu. On convient de la représenter par une fonction de répartition et une loi de conciliation à deux points d'appui dont les choix ont été amplement justifiés par ailleurs [26,27]. Cette caractérisation est de plus affinée en opérant la transformation structurante  $Y = \log T$  qui assure à la distribution  $Y$  d'être gaussienne i.e. d'être définie à partir de sa moyenne et de sa covariance.

Dans la formulation du problème exprimée par l'équation (1), les incertitudes affectent aussi bien les éléments de la matrice  $\mathbf{B}$  que ceux du second membre  $\mathbf{Q}$  qui exprime, plus spécifiquement, les incertitudes sur les conditions aux limites et les termes sources.

À l'équation (1), on assigne un statut d'identificateur des paramètres et de simulateur de l'écoulement ce que l'on traduit en bâtissant une fonctionnelle composite :

$$J(Y^*) = J_h(Y^*) + J_Y(Y^*) \quad (3)$$

avec un terme  $J_h(Y^*)$  exprimant le calage des charges et un terme  $J_Y(Y^*)$  exprimant la plausibilité des paramètres. De sorte que le calcul des charges actualisées  $h^*$  s'effectue via la minimisation de  $J(Y^*)$  par :

$$H^* = B^{-1}(Y^*) Q \quad (4)$$

Depuis les travaux de Wilkinson [11], il est établi que les méthodes de résolution de ce type d'équations sont tributaires des caractéristiques spectrales de la matrice  $\mathbf{B}$ . Selon le contexte numérique, ces incertitudes sur  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{Q}$  sont donc susceptibles d'affecter la sensibilité du système (1) dont il importe d'éprouver la stabilité par l'examen de sa régularité.

## REGULARITE DU SYSTEME LINEAIRE

Cette question est loin d'être subsidiaire puisque la définition de la régularité d'un système est corrélative à celle de stabilité qui réfère à l'ordre de grandeur de l'erreur induite par les incertitudes sur les données.

Lorsqu'elles sont de même ordre, ces erreurs expriment la sensibilité du système et définissent la stabilité de la solution relativement aux perturbations des données du problème. Le conditionnement  $\gamma$  défini par [11] en rend compte. Si ces erreurs ne sont pas de même ordre de grandeur, le plus grand ordre de l'erreur induite définit la régularité  $q$ . La  $q$ -stabilité traduit cette extension et introduit

un conditionnement d'ordre  $q$ . Formellement, on exprime ces notions par :

$$\forall H \in V \quad \|H - H_0\| \leq M \|T - T_0\|^q ; \quad \gamma_a(\mathbf{B}) = \limsup_{T \in V, T \neq T_0} \frac{\|H - H_0\|}{\|T - T_0\|^q}$$

où  $V$  est un voisinage de la donnée  $T_0$ ,  $M$  une constante

On trouvera dans [15] des développements conséquents sur ces notions.

Dans le cas des systèmes représentés par l'équation de l'écoulement (1), la régularité est d'ordre 1 en  $(\mathbf{B}, q)$  [15]. On peut donc rendre compte de la sensibilité du système aux perturbations par la mesure du conditionnement :

$$\gamma(\mathbf{B}) = \|\mathbf{B}^{-1}\| \|\mathbf{B}\| \quad (5)$$

L'erreur relative induite par les incertitudes  $\Delta \mathbf{B}$  et  $\Delta \mathbf{Q}$  sur le calcul de  $\mathbf{H}$  peut ainsi être estimée par :

$$\frac{\|\Delta \mathbf{H}\|}{\|\mathbf{H}\|} \leq \gamma(\mathbf{B}) \left\{ \varepsilon \frac{\|\Delta \mathbf{Q}\|}{\|\mathbf{Q}\|} + \varepsilon \frac{\|\Delta \mathbf{B}\|}{\|\mathbf{B}\|} \right\} + 0(\varepsilon^2) \quad (6)$$

dont la validité est assujettie à l'ordre des perturbations sur  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{Q}$ . Le conditionnement  $\gamma(\mathbf{B})$  y apparaît comme un facteur d'amplification des erreurs sur le calcul des charges dont il importe de maîtriser l'amplitude dans la gamme de variabilité de  $T$ .

Pour rendre compte de l'évolution de cette sensibilité dans différents contextes numériques, on recourra à la génération des éléments de la matrice  $\mathbf{B}$  par la méthode des simulations conditionnelles. Les milieux poreux synthétiques ainsi générés offrent l'opportunité d'étudier cette relation en modulant le facteur d'hétérogénéité du champ des transmissivités.

## SIMULATIONS CONDITIONNELLES

Les simulations conditionnelles amoindrissent le lissage que réalise tout estimateur  $Z$  dont les valeurs sont toujours moins dispersées que celles du phénomène sous-jacent. Une telle limitation s'assimile à une prise en compte partielle de la variabilité spatiale.

Les simulations conditionnelles remédient à cette lacune en produisant des réalisations qui ont les mêmes caractéristiques statistiques et géostatistiques que ceux obtenus à partir de l'inférence des données avec l'assurance d'une compatibilité des valeurs aux points d'observation. De la sorte, les valeurs simulées aux points de mesure sont égales à celles qui y sont observées. Ce qui en fait des estimateurs consistants de mêmes caractéristiques statistiques que le phénomène réel.

Pour cela, on substitue  $[y(x) - y^*(x)]$  à  $[z(x) - z^*(x)]$ , qui n'est connu qu'aux points de mesure, pour réaliser localement la consistance de l'estimateur  $Z$  :

$$\begin{aligned} y(x) &= y^*(x) + [y(x) - y^*(x)] \\ z(x) &= z^*(x) + [y(x) - y^*(x)] \end{aligned}$$

à partir des valeurs générées par les méthodes ad hoc de simulations non conditionnelles [26,27].

a. Nous avons fait le choix de la méthode des bandes tournantes [28] particulièrement performante. Son développement s'est effectué à partir de la correspondance établie entre la covariance définie dans le plan et celle définie sur la droite [24]. La méthode produit d'abord une série de réalisations non conditionnées  $Z_i(\zeta)$  à partir de la génération de processus aléatoires 1-D de direction  $\theta$  uniformément distribuée sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$ .

A la projection  $\zeta_{ki}$  d'un point  $\mathbf{x}_k$  sur  $D_i$ , est associée la contribution

$$Z_i(\zeta_{ki}) = Z_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_i)$$

Etendues aux  $L$  droites  $D_i$ , ces contributions, une fois agrégées, représentent une réalisation de  $Z$  de moyenne nulle et de covariance  $C_0$  (1). La génération du processus s'effectue avec l'équation :

$$Z(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{i=1}^L Z(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_i) \quad (7)$$

de covariance :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_p) &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^L E [Z_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_i) Z_j(\mathbf{x}_p, \mathbf{n}_j)] \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L E [Z_i(\mathbf{x}_k, \mathbf{n}_i) Z_i(\mathbf{x}_p, \mathbf{n}_i)] \\ &= \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L C_1(\mathbf{l}, \mathbf{n}_i) \end{aligned}$$

où  $Z_i$  et  $Z_j$  sont deux réalisations indépendantes tandis que  $C_1(\mathbf{l}, \mathbf{n}_i)$  représente la covariance définie sur  $R^1$  avec  $\mathbf{l}$  le vecteur distance entre les points corrélés.

La distribution uniforme de  $\mathbf{n}_i$  sur le cercle (C) permet alors d'assimiler  $Z(x)$  à un processus stationnaire et isotrope. Il sera de covariance  $C_2$  (1) si les covariances  $C_1$  vérifient la relation suivante [28] :

$$\int_0^1 C_1(l) \frac{d\zeta}{(1-\zeta^2)^{3/2}} = \frac{\pi}{2} C_2(l) \quad (8)$$

avec  $\zeta = |\mathbf{l}| \sin \theta = l \sin \theta$ .

Le conditionnement statistique des réalisations est réalisé en assurant leur consistance par co-krigeage des données  $Y = (y_1 \dots y_n)$  de log  $T$  et  $S = (s_1 \dots s_m)$  de débit spécifique par l'estimateur :

$$y^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i + \sum_{i=1}^m \beta_i s_i \quad (9)$$

dont les poids  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont déterminés via la résolution des équations :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_{YY}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^m \beta_i C_{YS}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mu_1 = C_{YY}(\mathbf{x}_{0,j}) \quad j=1, \dots, n \quad (10a)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i C_{SY}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \sum_{i=1}^m \beta_i C_{SS}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) + \mu_2 = C_{YS}(\mathbf{x}_{0,j}) \quad j=1, \dots, n \quad (10b)$$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \quad \sum_{i=1}^m \beta_i = 0 \quad (10c)$$

à partir des multiplicateurs de Lagrange  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et les covariances  $C_{YY}$ ,  $C_{SS}$ ,  $C_{SY}$  et  $C_{YS}$  relatives aux observations respectives de  $Y$  et de  $S$ . Cette estimation est assortie de la variance d'erreur d'estimation du co-krigeage.

$$\sigma_{ck}^2 = \sigma_Y^2(\mathbf{x}_0) - \sum_{i=1}^n \alpha_i C_{YY}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^m \beta_i C_{YS}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) - \mu_1 \quad (11)$$

Ces expressions du co-krigeage s'expriment sous une forme plus compact par :

$$K \lambda = k$$

où la matrice **K** est définie positive. La symétrie des liaisons corrélatoires ne s'y exprime que si, au lieu et place des covariances, on fait intervenir les variogrammes simples et croisés.

Pour mettre en œuvre la méthode, il suffit donc de :

1. Choisir un point origine
2. Tirer aléatoirement une droite  $D_i$  de direction  $\mathbf{n}_i$
3. Générer une réalisation  $Z_i$  ( $\zeta_i$ ) de moyenne nulle et de covariance  $C_1(l_i)$
4. Déterminer la projection orthogonale  $\zeta_{ki}$  d'un point  $\mathbf{x}_k$  sur  $D_i$
5. Incrémenter de  $Z_i$  ( $\zeta_{ki}$ ) la réalisation  $Z(\mathbf{x}_k)$
6. Répéter 2-5 pour toutes les droites  $D_i$
7. Normaliser  $Z(\mathbf{x}_k)$  en divisant  $1/L$ .
8. Kriger les valeurs simulées de  $Z(\mathbf{x}_k)$  aux points de mesure
9. Co-kriger **Y** à partir des données
10. Assurer la consistance de  $Z(\mathbf{x}_k)$  en l'incrémentant de l'erreur d'estimation  $\epsilon_Y$ .

Les réalisations obtenues sont toutes équiprobables, de même variogramme et histogramme et restituent localement les valeurs mesurées. Elles fournissent autant de distributions de valeurs  $y$  à la grille du modèle numérique à partir des valeurs simulées par  $Z$  et de l'erreur d'estimation évaluée par krigeage ou co-krigeage de **Y**.

### METHODE DE MONTE CARLO

Moyennant la donnée de  $N$  réalisations conditionnelles  $y$ , générées par le processus précédent,  $N$  matrices  $\mathbf{B}_i$  sont bâties et autant de conditionnements  $\gamma_i(\mathbf{B})$  et de rayons spectraux  $\rho_i(\mathbf{B})$  calculés. Les valeurs moyennes échantillonnées de  $\gamma(\mathbf{B})$  et  $\rho(\mathbf{B})$  sont évaluées par :

$$\bar{\gamma}(\mathbf{B}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \gamma_i \quad (12)$$

$$\bar{\rho}(\mathbf{B}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_i \quad (13)$$

ainsi que les variances correspondantes :

$$\text{var}[\gamma(\mathbf{B})] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\gamma_i - \bar{\gamma})^2 \quad (14)$$

$$\text{var}[\rho(\mathbf{B})] = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\rho_i - \bar{\rho})^2 \quad (15)$$

Pratiquement, ces expérimentations numériques ont porté sur le modèle numérique présenté en [22] dont le principe de calcul a été reconduit. L'information disponible est extraite de la population  $N_Y(2.5, 0.3; 120)$  dont le tableau 1 donne un échantillon extrait de la réalisation générée à l'aide du modèle COSIM [29]. L'analyse géostatistique a été entreprise avec les modèles GEO-EAS et GEO-PACK, deux standards de l'US EPA [30,31]. Le variogramme tracé avec ces valeurs a été calé sur un modèle de type sphérique de caractéristiques :

- effet de pépité = 0 ;
- palier = 0.35 ;
- portée 150 m .

**Tableau 1.** Localisation des points de mesure

Abscisse	Ordonnée	log T
75	275	- 3,85
125	125	- 2,56
125	225	- 2,53
125	325	- 2,39
225	125	- 3,26
225	325	- 2,33
275	275	- 3,49

On notera que ces éléments du variogramme diffèrent quelque peu de ceux qui sont associés au variogramme de la population d'où ont été extraits les points de mesure. Il peut même paraître présomptueux de prétendre modéliser ces variogrammes à partir d'un nombre de points aussi réduit. Aussi nous sommes-nous guidés sur le variogramme « réel ». Et ce seront donc ces valeurs de la portée et du palier, consistantes avec les données, que nous avons utilisées pour le krigeage de log T.

### RESULTATS

Aussi bien le rayon spectral que le conditionnement révèlent un comportement formellement similaire à celui observé avec des données non conditionnées dès lors que la distance des points de mesure est inférieure à la portée. On retrouve dans les caractéristique du graphe, celles relevées en [22] : croissance monotone respective de  $\rho(\mathbf{B})$  et  $\gamma(\mathbf{B})$  avec l'écart-type modulée par la longueur de corrélation. Dès qu'elle lui est supérieure, l'effet de l'information a priori influence les caractéristiques spectrales de la matrice **B** en ajustant les valeurs qu'elles affichent. Les tableaux 2 et 3 en donnent une illustration pour  $\rho(\mathbf{B})$  et  $\gamma(\mathbf{B})$ .

**Tableau 2.** Statistiques sur le rayon spectral de la matrice **B** obtenues à partir de données non conditionnées et conditionnées sur 7 points de mesure.

Longueur de corrélation	Moyenne	Médiane	Ecart-type
Non conditionnée	0,161	0,146	0,073
150	0,121	0,111	0,063
170	0,046	0,043	0,030

Sur cet exemple, le variogramme de log T a été calé sur un modèle de type sphérique de caractéristiques :

- effet de pépité = 0 ;
- palier = 0.39 ;
- portée = 200 m.

**Tableau 3.** Statistiques sur le conditionnement de la matrice **B** obtenues à partir de données non conditionnées et conditionnées sur 7 points de mesure.

Longueur de corrélation	Moyenne	Médiane	Ecart-type
Non conditionnée	128	112	61
150	98	87	51
170	120	94	75

Nous avons aussi appréhendé l'influence de la corégionalisation. Dans ce cas, l'estimation du champ de **Y**

a été précisée en intégrant la donnée sur le débit spécifique S à l'information disponible (tableau 4). La procédure précédente est reconduite à la différence près, qu'outre les variogrammes simples  $\gamma_{YY}$  et  $\gamma_{SS}$ , il a fallu déterminer le variogramme croisé  $\gamma_{YS}$ .

**Tableau 4.** Localisation des points de mesure de log T et de log S.

Abscisse	ordonnée	log T	log S
75	275	- 3.85	- 2.89
125	125	- 2.56	- 1.81
125	225	- 2.53	- 1.79
125	325	- 2.39	- 1.66
225	125	- 3.26	- 2.40
225	325	- 2.33	- 1.61
275	275	- 3.49	- 2.59

La difficulté à déterminer les variogrammes expérimentaux à partir d'un nombre de points aussi réduit, nous a conduit à opter de travailler sur les variogrammes sous-jacents calculés à partir d'un échantillon plus large. Ces variogrammes ont été calés sur des modèles de type sphérique en utilisant les moindres carrés pondérés. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau 5. Les expressions respectives de ces différents variogrammes sont les suivantes :

$$\gamma_Y = 0.009h + 0.39 \left[ 1.5 \left( \frac{h}{227} - 0.5 \frac{h^3}{227^3} \right) \right] \quad h \leq 227$$

$$\gamma_Y = 0.009h + 0.39 \quad h > 227$$

$$\gamma_S = 0.034h + 0.404 \left[ 1.5 \left( \frac{h}{219} - 0.5 \frac{h^3}{219^3} \right) \right] \quad h \leq 219$$

$$\gamma_S = 0.034h + 0.404 \quad h > 219$$

$$\gamma_{YS} = 0.112h + 0.441 \left[ 1.5 \left( \frac{h}{199} - 0.5 \frac{h^3}{199^3} \right) \right] \quad h \leq 199$$

$$\gamma_{YS} = 0.112h + 0.441 \quad h > 199$$

**Tableau 5.** Caractéristiques des variogrammes simples et croisés de Y = log T et S.

Variogrammes	$\gamma_{YY}$	$\gamma_{SS}$	$\gamma_{YS}$
effet de pépité	0.009	0.112	0.034
palier - c(0)	0.384	0.441	0.404
portée	227	199	219

La contrainte de symétrie ainsi que celle qui impose à la matrice de co-krigeage d'être définie positive ont pu être vérifiées par simple substitution de leurs valeurs respectives:

$$\gamma_{YS} \leq [\gamma_Y \gamma_S]^{1/2}$$

$$c_{YS}^0 \leq [c_Y^0 c_S^0]^{1/2} ; c_{YS} \leq [c_Y c_S]^{1/2} ; a_{YS} \leq [a_Y a_S]^{1/2}$$

Par ailleurs, le caractère exact de l'interpolateur permet de ré-estimer successivement les valeurs mesurées. La qualité des variogrammes retenus est alors évaluée par la moyenne de l'erreur d'estimation  $m_e$  et par la variance des erreurs réduites  $\sigma_e^2$ . Les tests de validation entrepris

donnent des moyennes des erreurs d'estimation proches de zéro et des variances des erreurs réduites voisines de l'unité (tableau 6). Cela atteste de la pertinence des modèles structuraux retenus i.e. que ces modèles géostatistiques rendent compte de la loi de conciliation de Y et de S.

**Tableau 6.** Tests de validation des modèles structuraux.

Variogrammes	Moyenne	Variance
$\gamma_{YY}$	- 0.007	0.99
$\gamma_{SS}$	- 0.002	0.99
$\gamma_{YS}$	- 0.024	1.00

## CONCLUSIONS

Dans la mesure où l'information a priori contribue à la réduction de l'incertitude sur T, elle affecte la variabilité spatiale de log T qui, à son tour, affecte le rayon spectral et le conditionnement de la matrice B. C'est dans ce sens qu'il faut interpréter les résultats obtenus qui étendent ceux établis dans une situation où le modèle géostatistique des hétérogénéités ignore la contrainte du conditionnement statistique des données [22]. Cette influence ne se manifeste, toutefois, que pour une configuration des points de mesure qui apporte effectivement une information à la définition du champ des transmissivités. L'optimisation et la rationalisation des mesures trouvent donc, là aussi, une justification qui accroît la stabilité spectrale. Ces résultats remettent en perspective ceux dégagés en [32] où les conséquences sur l'objectif de modélisation sont appréhendées tant en termes de détérioration du conditionnement et de sensibilité aux données de T qu'en termes d'impacts sur la question du problème inverse et sur l'inversion matricielle.

## REFERENCES

- [1] Gehlar L.W. – Stochastic subsurface hydrology. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1993.
- [2] Delhomme J.P. – Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters : a geostatistical approach. Water Res. Research 15 (2), p. 1979.
- [3] Kitanidis, P.K. et Vomvoris, E.G.- A geostatistical approach to the inverse problem in groundwater modeling (steady state) and one-dimensional simulations. Water Resources Research, vol. 19, no. 3, p. 677-690, 1983.
- [4] Mizell S.A., Gutjahr A.L. et Gehlar L.W. – Stochastic analysis of spatial variability in two-dimensional steady groundwater flow assuming stationary and non-stationary heads. Water Resources Research, vol. 18, no. 4, p. 1053-1067, 1982.
- [5] Rubin, Y. et Dagan, G. - Stochastic identification of transmissivity and effective recharge in steady groundwater flow : 1. Theory. Water Resources Research, vol. 23, no. 7, p. 1185-1192, 1987.
- [6] Dong A. – Estimation géostatistique des phénomènes régis par des équations aux dérivées partielles, Thèse de Doctorat, ENMS Paris, 1990.
- [7] Zhang, D. Numerical solutions to statistical moment equations of groundwater flow in nonstationary, bounded, heterogeneous media. Water Resources Research, vol. 34, no. 3, p. 529-538, 1998.
- [8] McLaughlin D. , Wood E.F. – A distributed parameter approach for evaluating the accuracy of groundwater model prediction, 1. Theory. Water Res. Research 24 (7), p.1034-1047, 1988.

- [9] Zimmerman D.A., De Marsily, G., Gotway C.A., Marietta, M.G., Axness, C.L., R.L., Bras, R.L., Carrera, J., Dagan G., Davies, P.B., Gallegos, D.P., Galli, A., Gómez-Hernandez, J.J., Grindrid, P., Gutjahr, A.L., Kitanidis, P.K., Lavenue, A.M., McLaughlin, D., Neuman, S.P., Ramarao, B.S., Ravenne, C. et Rubin, Y. (1998). A comparison of seven geostatistically based inverse approaches to estimate transmissivities for modeling advective transport by groundwater flow. *Water Resources Research*, vol. 34, no. 6, p.1373-1413.
- [10] Ababou R., McLaughlin D., Gehlar L.W., Tompson A.F.B. – Numerical simulation of saturated/unsaturated flow fields in randomly heterogeneous porous media. International symp. On the stochastic approach to subsurface flow. CNRS, Greco 35, ed. De Marsily, Montvillargenne, p. 294-312, 1985.
- [11] Wilkinson J.H. – Rounding errors in algebraic process. Englewoods Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1963.
- [12] La Porte et Vignes J. – Algorithmes numériques. Analyse et mise en œuvre, tome 1, Arithmétique des ordinateurs. Systèmes linéaires, éditions Technip, Paris, 1974.
- [13] Larson J.L., Sameh A.H. – Algorithms for roundoff error analysis – A relative approach. *Computing*, 24, p. 275-297, 1980.
- [14] Ehrel J. – Statistical estimation of roundoff errors and condition numbers. Rapport de recherche n° 1490, INRIA, , p 27, septembre 1991.
- [15] Golub G.H., Van Loan C.F. – Matrix computations. University press, 1993.
- [16] Ehrel J. – Experiments with data perturbations to study condition numbers and numerical stability. *Computing*, 51, 1993, p. 29-44.
- [17] Ebrahimian R., Baldick R. – State estimator condition number analysis. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol 16 n°2, may 2001.
- [18] El Ghaoui L. – Inversion error, condition number and approximate inverses of uncertain matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 342, (1-3), 2002.
- [19] Dunagan J. and Teng S.H. – Smoothed analysis of Renegar’s condition number for linear programming in SIAM Conference on Optimization, 2002.
- [20] Mosé R., Siegel P., Ackerer Ph., and Chavent, G. – Application of the mixed hybrid finite element approximation in a groundwater flow model : Luxury or necessity ? *Water resources research*, vol. 30, pp. 3001-3012, 1994.
- [21] Hoteit H., Erhel J., Mosé R., Phillippe B. and Ackerer P. Numerical reliability and CPU time for the mixed methods applied to solve the flow problems in porous media. *Rap. De recherche INRIA n° 4228*, p.46, 2001.
- [22] Benali A.M. – Hétérogénéités des milieux poreux et instabilité spectrale de la matrice de l’écoulement, *Sciences & Technologie*, n°21, p.75-84, 2004.
- [23] Ahmed S., de Marsily G. – Comparison of geostatistical methods for estimating transmissivity using data on transmissivity and specific capacity. *Water resources research*, vol. 23, n°9, p 1717-1737, 1987.
- [24] Deutch C.V. et Journel A.G. - *GSLIB : Geostatistical software Library and User’s Guide*. Oxford University Press, 1992.
- [25] Bear J. – *Dynamics of fluids in porous media*. Elsevier, New York, 1972.
- [26] Freeze R.A., Marsily de G., Smith L., Massman J. – Some uncertainties about uncertainty. *Proceedings of a DOE/AECL Conf. On Geostatistical sensitivity and uncertainty methods for groundwater flow and radionuclides transport*, San Francisco, 1989.
- [27] Hoeksema, R.J., Kitanidis, P.K. - Comparison of Gaussian conditional mean and kriging estimation in the geostatistical solution of the inverse problem. *Water Resources Research*, vol. 21, no. 6, p. 825-836, 1985.
- [28] Mantoglu A., Wilson J.L.- *Simulation of random fields with the turnig bands methods*. Report n° 264, Ralph Parsons Lab., Dept of Civil Eng., MIT, 1981.
- [29] Carr J.R. – Program Cosim : Co-conditional simulation of spatial data. A fortran code available from the GMM BBS, dept of geol. engineering university of Missouri, 1992.
- [30] Englund E. , Sparks A. – *Geostatistical Environmental Assesment Software*. Env. Monitoring Systems Lab. US EPA, 1991.
- [31] Yates S.R., Yates M.V. – *Geostatistic for waste management*. Robert Kerr Env. Research Lab., Ada, US EPA, 1990.
- [32] Benali A. & de Backer L.W. – Identifiability versus heterogeneity in groundwater modelling systems. *Sciences & Technologie*, n°19, p.75-84, 2003.