Sciences & Technologie B – N°23, juin (2005), pp. 45-48.

STABILITE DES ELEMENTS DES STRUCTURES EN COMPOSITES PAR INTERPRETATION DE LA THEORIE DE LA SECURITE

Reçu le 03/01/2005 – Accepté le 22/05/2005

Résumé

Pour une série des matériaux de structure, y compris les composites, on propose une approximation analytique des tables φ - λ . La perte de la stabilité est examinée comme le "refus". La probabilité du refus est calculée pour des barres et des plaques comprimées réalisées en matériau composite.

***Mots clés**: composite, résistance, stabilité, sécurité, probabilité de rupture, probabilité de perte de stabilité, coefficient de sécurité.*

Abstract

For different types of materials including composites, an approximate solution of table bending reduction factor slenderness is proposed. The lost of stability is considered as a failure of the criterion. The probability of failure is then computed for plates and bars in composite

***Keywords**: resistance, stability, failure probability, lost of stability, safety factor.*

G. PLUVINAGE
Laboratoire de Fiabilité Mécanique, ENIM, Université de Metz
France

V.T. SAPUNOV
Chaire de Physique de la Résistance
Institut d'Ingénieurs Physiciens de Moscou, Russie

ملخص

لسلسلة من مواد الهيكلة، بما فيها المركبات، نقترح تقريبية تحليلية لجداول φ-λ . لقد تم تحليل فقدان الثبات كرفض. إن احتمال الرفض تم حسابه بالنسبة للوحات و الصفائح المضغوطة المنجزة بالمواد التركيبية.

الكلمات المفتاحية: مقاومة، الثبات، إحتمال الإنفصال، إحتمال فقدان الثبات.

RELATIONS ENTRE LE COEFFICIENT DE REDUCTION EN FLEXION LONGITUDINALE ET LA FLEXIBILITE DE BARRE COMPRIMEE $\varphi-\lambda$

Les calculs de stabilité des barres comprimées sont généralement réalisés avec l'utilisation du coefficient de réduction de la contrainte admissible φ ($0<\varphi\leq 1$), réduisant ainsi le problème de stabilité à un calcul traditionnel de compression :

$$\sigma_c = P_c / S \leq \varphi \sigma_{c,ad} \qquad (1)$$

où P_c est la force de compression longitudinale de dimensionnement ; S est l'air de la section droite ; σ_c est la contrainte de compression de dimensionnement dans la barre ; $\sigma_{c,ad}$ est la contrainte admissible en compression du matériau.

Pour tous matériaux, le coefficient de réduction de la contrainte admissible φ dépend de l'élancement de la barre $\lambda = \mu l/i$, où μl est la longueur réduite de la barre, $i = \sqrt{I/S}$ est le rayon minimum de giration et *I* est le moment minimum d'inertie de la section droite de la barre.

Les relations entre les grandeurs φ et λ ont été obtenues expérimentalement pour différents matériaux et se présentent habituellement sous forme des tables ou de graphiques dans les codes et règlements. Les calculs de stabilité de barres comprimées avec la formule (1) utilisent une méthode d'itération et par conséquent sont effectués numériquement. Cependant la difficulté d'application réside dans l'absence de formalisme mathématique commode des données sous forme de tables ou de graphiques.

Nous proposons dans ce qui suit de traiter le problème du formalisme mathématique des relations φ - λ et d'examiner dans ce qui suit des généralisations.

Nous proposons la démarche suivante : parmi toutes les relations analytiques disponibles $\varphi_i = f_i(\lambda)$ nous aurons à choisir la relation la mieux adaptée pour la description des données expérimentales relative à la stabilité de barres comprimées constituées d'un matériau donné. Autrement dit, nous serons amené à résoudre un problème de comparaison et discrimination des modèles mathématiques $\varphi_i = f_i(\lambda)$ décrivant la relation expérimentale φ - λ.

La méthode proposée est basée sur la possibilité de la réduction de chacune de ces modèles $\varphi_i = f_i(\lambda)$ sous une forme canonique non dimensionnelle de similitude affine [1]

$$\varphi_i / b_i = f_i(\lambda / a_i) \qquad (2)$$

Cette méthode permet de présenter les relations analysées sous une forme liée au graphe des fonctions f_i. En d'autres termes, on peut montrer que les paramètres b_i et a_i ne jouent qu'un rôle de coefficients d'échelle. En effet, en prenant le logarithme des relations étudiées (2), nous obtenons

$$\lg\varphi_i - B_i = F_i\left(\lg\lambda - A_i\right) \qquad (3)$$

où $B_i = \lg b_i$; $A_i = \lg a_i$; $F_i(x) = \lg\varphi_i(10^x)$.

En faisant l'hypothèse que $b_i = 1$, $a_i = 1$ (dans ce cas $B_i = 0$, $A_i = 0$, $\varphi_i = \varphi_i^0$), la relation analysée sera identifiée dans un graphe en coordonnées bi logarithmiques $\lg\varphi_i^0 - \lg\lambda$ au moyen de son indicateur fonctionnel F_i qui ne caractérise qu'une seule forme de courbe (3). On peut dire que, dans ces coordonnées logarithmiques $\lg\varphi_i^0 - \lg\lambda$ les modèles mathématiques analysés (3) se différentient uniquement par leurs identificateurs fonctionnels F_i. Ces identificateurs restent invariables et par conséquent décrivent la condition d'invariabilité de la forme des courbes étudiées. Les identificateurs fonctionnels F_i définissent seulement la forme des courbes des modèles mathématiques utilisés et sont les courbes références de ces modèles. Les positions des courbes références dans le plan sont définies par les paramètres, B_i et A_i, qui temporairement (seulement pour leur définition) sont considérés comme nuls.

La procédure de choix des relations $\varphi_i = f_i(\lambda)$ qui ajustent le mieux les données expérimentales se ramène simplement à la comparaison visuelle des courbes références F_i avec les courbes expérimentales dans les coordonnées bilogarithmiques $\lg\varphi_i^0 - \lg\lambda$.

Pour l'évaluation numérique de l'adéquation des relations $\varphi_i = f_i(\lambda)$ aux données expérimentales, on peut utiliser n'importe quel critère statistique. Nous ajoutons que la comparaison de la courbe référence avec les résultats expérimentaux donne la possibilité non seulement choisir le modèle mathématique, mais encore de déterminer assez simplement les paramètres de ce modèle.

La possibilité de présentation des relations $\varphi_i = f_i(\lambda)$ sous forme canonique de similitude affine sera illustrée à partir de relation bien connue de Rankine W.J. qui est souvent utilisée pour les calculs de stabilité de barres comprimées

$$\varphi_1 = \alpha_1 / \left(1 + \alpha_2\lambda^{\alpha_3}\right) \; .$$

Cette relation est transformée aisément sous la forme :

$$\varphi_1 / b_1 = 1 / \left[1 + (\lambda / a_1)^{c_1}\right] \qquad (4)$$

où $b_1 = \alpha_1$; $a_1 = 1/\alpha_1$; $c_1 = \alpha_3$.

Pour ce même problème nous examinerons des modèles similaires [2] sous leur forme canonique de similitude affine :

$$\varphi_2 / b_2 = \exp\left[-(\lambda / a_2)^{c_2}\right] \qquad (5)$$

$$\varphi_3 / b_3 = \left[1 + (\lambda / a_3)^2\right]\exp\left[-(\lambda / a_2)^{c_3}\right] \qquad (6)$$

$$\varphi_4 / b_4 = \frac{2}{1 + \exp(\lambda / a_4)^{c_4}} \qquad (7)$$

$$\varphi_5 / b_5 = 1 + \frac{c_5 \sec(\lambda / a_5)}{1 + c_5} \qquad (8)$$

$$\varphi_6 / b_6 = 1 + \frac{c_6(\lambda / a_6)}{1 - (\lambda / a_6)^2} \qquad (9)$$

Les relations (5) et (7) sont des relations empiriques ; le modèle (8) ou formule de Timoshenko S.P. prend en compte l'exentricité de la charge longitudinale ; la relation (9) prend en considération les imperfections initiales dans les barres.

La procédure de comparaison des différents modèles présentés est réalisée en considérant $b_i = 1$ (i = 1, 2..., 6) dans les relations (4) - (9).

Cette étude ne se limite pas à la comparaison visuelle des courbes de référence des relations à étudier avec les courbes expérimentales. Pour l'évaluation numérique de l'adéquation des modèles mathématiques aux données expérimentées nous utilisons le critère statistique de Gauss appliqué aux logarithmes des valeurs du coefficient de flexion longitudinale :

$$\Delta = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(\lg\varphi_k^{exp} - \lg\varphi_k^{cal}\right)^2 / (n - n_0)} \qquad (10)$$

où φ_k^{exp} et φ_k^{cal} sont les valeurs expérimentales et calculées du coefficient de flexion longitudinale ; n est le nombre des noeuds d'interpolation ; $n_0 = 2$ est le nombre des paramètres des modèles étudiés.

Pour la recherche des paramètres entrant dans ces modèles mathématiques, nous minimisons la fonction de l'erreur (10) comme fonction de deux variables. Dans ce but nous utiliserons une procédure itérative : les deux estimations successives du paramètre a_i ne doivent pas différer l'une de l'autre d'une valeur supérieure de 5%. En complément de la recherche de la minimisation du critère d'adéquation (10) pour le paramètre a_i, nous réalisons aussi les recherches de la valeur minimale de l'erreur Δ pour toute modification discontinue du paramètre de forme c_i avec un pas égal à 0,1.

A titre d'exemple, dans la table 1 nous présentons les valeurs minimales de l'erreur (en fait 100Δ) pour les différents modèles proposés et analysés (relations 4 à 9).

Table 1: Valeurs minimales de l'erreur selon critère de Gauss pour les différents modèles étudiés

Modèles mathématiques	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
100Δ	1,13	2,01	3,30	2,03	1,79	1,15

Les valeurs présentées sont relatives au problème de la stabilité de barres comprimées en composite verre-résine (composite stratifié à fibre de verre : verrotissu avec liant polyester) d'utilisation traditionnelle pour la construction de navires.

Pour un niveau de confiance donnée, la procédure de R.A. Ficher permet de retenir les modèles (4) (avec α_1=74,07; c_1=2,6) et (9), car ils répondent le mieux aux données expérimentales pour ce composite verre-résine. Cependant pour des raisons de simplicité d'application, nous choisirons lors d'une d'utilisation ultérieure la formule (4) de Rankine W.J., avec c_1=2 (100Δ=1,7), qui se présente sous la forme suivante :

$$\varphi = 1/\left[1+(\alpha\lambda)^2\right] \qquad (11)$$

où le paramètre α est déterminé par la relation $\alpha = 1/a_1$.

L'utilisation de la relation (11) dans les calculs de stabilité des barres comprimées réalisées avec d'autres matériaux [2], montre la possibilité d'application de cette formule avec un degré d'exactitude suffisante. Pour mesurer cette exactitude, nous considérons l'erreur principale de l'approximation en coordonnées logarithmiques

$$r = \frac{100\ \Delta \cdot t_\beta}{M\sqrt{n}} \qquad (12)$$

où t_β est la valeur du paramètre statistique de Student pour le niveau du risque β=5% avec un nombre de degrés de liberté n-1; M=lge=0,4343.

Des valeurs du paramètre α et de l'exactitude r pour divers matériaux sont présentées dans la table 2.

Table 2: Valeurs du paramètre α et de l'exactitude *r* pour divers matériaux.

Matériaux	100 α	*r* , %
Fonte grise (λ < 100)	1,96	2,16
Aciers ordinaires	0,85	4,10
Aciers à outils	1,12	3,17
Verroplastique	1,35	6,91
Bois	1,40	3,40
Pin (sens longitudinal)	1,35	5,76

2. PROBABILITE DE PERTE DE STABILITE D'UNE BARRE COMPRIMEE

Nous examinerons la probabilité de perte de stabilité d'une barre comprimée du composite verre-résine. Nous considérons que la charge, la contrainte admissible à la compression et les dimensions géométriques de la barre sont des grandeurs aléatoires, distribuées selon les lois normales.

Nous examinerons le cas d'une articulation en bout de barre qui a comme section droite hxb, et comme longueur L et est chargée par la force de compression P_c. Ces données varient dans les intervalles h=6±1,5 cm,b=3±0,45 cm, L=120±9cm, Pc=25±4 k.

Pour le composite verre-résine de fabrication ordinaire utilisé pour la construction des navires nous avons une valeur moyenne de la contrainte admissible en compression égale $\bar{\sigma}_{c,ad}$ = 180 MPa avec un écart type ζ_R=24 MPa.

$$\sigma_{c,ad} = \bar{\sigma}_{c,ad} \pm \zeta_R = \bar{\sigma}_{c,ad}(1 \pm \vartheta_R) = 180(1 \pm 0{,}133) \qquad (13)$$

où $\vartheta_R = \zeta_R / \bar{\sigma}_{c,ad} = 0{,}133$ est le coefficient de variation de la contrainte admissible. Concernant les propriétés des matériaux, si les essais mécaniques ont été réalisés avec soin, le coefficient de variation est un excellent indicateur de la qualité de la fabrication. Selon la valeur du coefficient de variation, on peut juger à priori de la qualité des méthodes de fabrication des matériaux en général et des matériaux métalliques et composites en particulier. Pour les composites utilisés dans le secteur civil de l'économie, les valeurs ϑ_R n'excèdent pas 0,2 – 0,25 (20 – 25%).

Préalablement nous calculons la probabilité de la rupture de cette barre soumise à la compression.

En considérant que les écarts types relatifs aux dimensions *h* et *b* sont petits et que les grandeurs aléatoires *h* et *b* sont corrélées entre elles, l'aire de la section droite *S* est donnée par la formule de transport des erreurs [3]:

$$S = b \cdot h = \bar{S}(1 \pm \vartheta_S), \vartheta_S = \vartheta_b + \vartheta_h = 0{,}4 \qquad (14)$$

Dans ces relations sont incorporées les coefficients de variation de l'aire ϑ_S, de la largeur ϑ_b et de la hauteur ϑ_h de la barre comprimée.

Il n'y a pas à priori corrélation entre les grandeurs aléatoires S et Pc ($\vartheta_P = 0{,}16$) et nous pouvons écrire le coefficient de variation de la contrainte de compression (ou la valeur moyenne $\bar{\sigma}_c$ = 13,9 MPa) :

$$\vartheta_\sigma = \sqrt{\vartheta_P^2 + \vartheta_S^2} = 0{,}43 \qquad (15)$$

Le calcul de la probabilité de rupture V est obtenu à partir de la formule asymptotique [3, 4]

$$V = 0{,}399\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^3}\right)\exp\left(-\frac{\gamma^2}{2}\right) \qquad (16)$$

Cette formule est plus facile d'utilisation que l'intégrale traditionnelle de Laplace-Gauss.

La valeur de l'indice de sécurité γ de Gauss est déterminée par la relation suivante simplifiée [4]

$$\gamma = \frac{n-1}{\sqrt{\vartheta_\sigma^2 + \vartheta_R^2}} \qquad (17)$$

où $n = \bar{\sigma}_{c,ad}/\bar{\sigma}_c$ = 12,95 est le coefficient de sécurité. Il est facile de déduire de (17) la valeur de γ=26,55.

Si γ = 3 (règle des 3 écarts types utilisée en statistique), la probabilité P pour que la contrainte admissible à la compression $\sigma_{c,ad}$ du matériau se trouve dans l'intervalle $\bar{\sigma}_{c,ad} \pm 3\sqrt{D_R}$ ($\sqrt{D_R} = \bar{\sigma}_{c,ad}\vartheta_R$) est égale P=1-1,37.$10^{-3}$. Cette valeur est suffisante pour un élément de décoration mais insuffisante pour un élément soumis à un chargement. Par exemple, dans l'industrie automobile aux USA le niveau de risque admissible est de 3,2.10^{-5}, ce qui correspond à une valeur de γ = 4. Si les exigences sont plus sévères, le composite peut **être** utilisé pour des constructions tels que les réservoirs sous pressions. Si nous prenons dans ce cas 1 - P = 3.10^{-6}, nous avons γ = 4,5. On peut donc remarquer que des valeurs de γ supérieures à 5 correspondent à des probabilités de rupture V très faibles.

Dans notre cas la probabilité de la rupture de la barre comprimée pour $\gamma = 26{,}55$ est donc extrêmement faible.

Nous ferons des calculs analogues pour le cas de la perte de stabilité. Nous définirons préalablement le taux d'élancement de la barre $\lambda = \mu l/i$. Pour le mode de liaisons des extrémités de la barre, la longueur réduite est égale $\mu l = L$, le rayon de giration est égal à :

$$i = b/\sqrt{12} = 0{,}866(1 \pm 0{,}15)$$

Selon la procédure exposée précédemment nous trouvons $\lambda \approx 138$. La détermination du coefficient de la flexion longitudinale à l'aide de la formule (11) et du table 2 pour le composite verre-résine donne $\varphi \approx 0{,}349$. En d'autres termes, la contrainte critique en cas de la perte de stabilité est égale $\varphi\sigma_{c,ad} \approx 62{,}82$ MPa et le coefficient de stabilité est égal à $n \approx 2{,}87$.

La valeur de l'indice de sécurité de Gauss est de $\gamma=4{,}16$ et la probabilité de perte de stabilité est égale $V=1{,}58.10^{-5}$.

On peut voir, que si la probabilité de la rupture de cette barre en compression est extrêmement petite et la probabilité de la perte de stabilité est proche du niveau admissible.

3. PROBABILITE DE PERTE DE STABILITE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE.

Nous examinerons le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions $a_1 \geq a_2$ dans le cas où elle est articulée sur ses bords. La plaque est comprimée en direction de sa base (axe 1) par l'effort $Q = T \cdot h \cdot a_2$, où h est l'épaisseur de la plaque ; T est l'intensité de la charge distribuée de compression. En faisant l'hypothèse que le matériau de la plaque travaille avec un taux inférieur à la limite de l'élasticité, la charge critique est donnée par la formule [5] :

$$T_{cr} = \frac{\pi^2\sqrt{D_1D_2}}{a_2^2}\left[\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}\left(\frac{ma_2}{a_1}\right)^2 + \frac{2D_3}{\sqrt{D_1D_2}} + \sqrt{\frac{D_2}{D_1}}\left(\frac{a_1}{ma_2}\right)^2\right] \quad (18)$$

où

$$D_i = \frac{E_i h^3}{12(1-\nu_1\nu_2)} \quad (i = 1,2)$$

sont les rigidités en flexion ; E_1 et E_2, ν_1 et ν_2 sont les modules de l'élasticité et les coefficients de Poisson dans les directions correspondantes. La rigidité D_3 est déterminée par la relation $D_3 = \nu_2 D_1 + 2D_{12}$. La grandeur $D_{12} = Gh^3/12$ (G est le module de cisaillement) représente la rigidité due cisaillement dans le plan de la plaque. Le coefficient m dépend du rapport des longueurs des côtés de la plaque a_1/a_2 et est égal au nombre de demi-ondes de la plaque à la perte de stabilité.

Nous déterminons la probabilité de perte de stabilité de la plaque pour : $a_1 = a_2 = 1$ m ; h = 1 cm ; m = 1 ; Q = 10 kN ; $E_1 = 1{,}5.10^4$ MPa ; $E_2 = 1{,}3.10^4$ MPa ; $G = 0{,}2.10^4$ MPa ; $\nu_1 = 0{,}14$; $\nu_2 = 0{,}12$.

Toutes ces grandeurs sont considérées comme aléatoires avec des coefficients de variation égaux à 0,1. En outre nous considérons que les caractéristiques géométriques de la plaque sont corrélées entre elles car leurs mesures sont réalisées avec le même instrument. Cette hypothèse est aussi vraie pour les caractéristiques élastiques du matériau, cependant les caractéristiques géométriques et élastiques ne se corrèlent pas entre elles.

En appliquant, comme précédemment la formule du transport des erreurs [3], nous obtenons la condition de la stabilité de la plaque écrite avec son intervalle :

$$T(1 \pm \vartheta_T) \leq T_{cr}(1 \pm \vartheta_{T_{cr}}) \quad (19)$$

où ϑ_T et $\vartheta_{T_{cr}}$ sont les coefficients de variation des grandeurs aléatoires T et T_{cr}. Il est facile de trouver, que pour T= 1 MPa et $T_{cr} = 3{,}05$ MPa les coefficients de variation sont égaux à $\vartheta_T = 0{,}224$ et $\vartheta_{T_{cr}} = 0{,}1$. En prenant n = 3,05 ; $\vartheta_\sigma = \vartheta_T$ et $\vartheta_R = \vartheta_{T_{cr}}$, avec l'aide de la formule (17) nous obtenons la valeur de l'indice de sécurité $\gamma = 6{,}61$ et selon la formule (16) nous calculons la probabilité de perte de stabilité de la plaque $V = 0{,}188.10^{-10}$.

Pour la plaque rectangulaire avec $a_1/a_2 = 2$ quand m = 3, les caractéristiques de sécurité sont approximativement les mêmes que pour la plaque carrée.

CONCLUSION

Les modules d'élasticité des composites sont approximativement du même ordre de grandeur que ceux des aciers mais légèrement inférieurs. Toutefois la dispersion des valeurs de leurs caractéristiques mécaniques est commodément décrite par le coefficient de variation qui est 2 à 4 fois plus important. En outre, le procédé de fabrication de structures portantes en composites (par exemple, dans la construction de navires) conduit à une dispersion supplémentaire et significative de leurs dimensions géométriques. Ces faits impliquent la nécessité des calculs de stabilité de barres et de plaques dans le cadre d'une approche sécuritaire réalisée en supposant des distributions qui suivent la loi normale pour ces grandeurs aléatoires.

Pour les calculs pratiques de la stabilité des barres comprimées à l'aide du coefficient de flexion longitudinale, il a été montré que le choix se porte sur la formule modifié de Rankine W.J. à un paramètre. Les valeurs du paramètre recherché sont calculées pour une série de matériaux traditionnels, ainsi que pour le composite verre- résine.

On donne des exemples numériques de calculs de stabilité de barre et de plaque en composite verre-résine.

REFERENCES

[1] Pluvinage G., Sapunov V.T. Extrapolation thermo-temporelle de résistance à la fatigue des matériaux. Nev Trends in Fatigue and Fracture II. May 2003, Hammamet, Tunisie.

[2] Timoshenko S.P., Géré J. Mécanique des matériaux. Moscou : Mir, 1974. – 457 p.

[3] Rjanitsin A.R. Théorie du calcul des constructions pour la sécurité. Moscou : Stroïizdat, 1978. - 239 p.

[4] Pluvinage G., Sapunov V.T. Résistance et conception fiabiliste de la sécurité des matériaux composites. Revue des composites et des matériaux avancés. 2001. V.11. № 2. P. 149 – 160.

[5] Lekhnitsky S.G. Plaques anisotropes. Moscou : Gostekhizdat, 1957. - 295 p.